TD PB1 : Corrigé des exercices

Exercice 1

1) Soit Ω l'ensemble des codes.
Pour obtenir un code :

→ on choisit un 1er chiffre : il y a 9 possibilités

→ on répète cela 3 fois, avec 9 possibilités à chaque étape.

Donc $\mathrm{Card}(\Omega) = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$.

2) Modélisation

Ω est l'univers de l'expérience et on le munit de la probabilité uniforme car il y a équiprobabilité.

a) Soit A : « le code contient au moins un 7 »

on a $\bar{A}$: « le code ne contient pas de 7 ».

$\bar{A}$ est l'ensemble des codes à 4 chiffres formés sur un clavier à 8 touches $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

Avec le même raisonnement qu'en 1),

$$\mathrm{Card}(\bar{A}) = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$$

Donc $P(\bar{A}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\bar{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{8^4}{9^4}$

Ainsi $\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{8^4}{9^4}}$

b) Notons B : « tous les chiffres sont pairs ».

B est l'ensemble des codes à 4 chiffres formés sur un clavier à 4 touches $\{2, 4, 6, 8\}$.

Comme précédemment, $Card(B) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$.

Donc $\boxed{P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{4^4}{9^4}}$

c) Soit C : « tous les chiffres sont différents »

Pour obtenir C :

→ on choisit un 1er chiffre : 9 possibilités

→ puis on choisit le 2e chiffre, différent du 1er : 8 possibilités

→ puis on choisit le 3e chiffre : 7 possibilités

→ puis on choisit le dernier : 6 possibilités

Donc $Card(C) = 9 \times 8 \times 7 \times 6$.

Ainsi

$$P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{9^4}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{8 \times 7 \times 6}{9^3}}$$

d) Soit D : « les chiffres sont dans l'ordre croissant ».

Pour obtenir D :

→ on choisit, sans tenir compte de l'ordre, 4 chiffres parmi les 9 : il y a ici $\binom{9}{4}$ possibilités

→ puis, on les range dans l'ordre croissant : il y a 1 seule façon de le faire

Donc $Card(D) = \binom{9}{4} \times 1 = \binom{9}{4}$ puis $\boxed{P(D) = \dfrac{\binom{9}{4}}{9^4}}$

Exercice 2

Modélisation : L'univers Ω est l'ensemble des mains de 8 cartes parmi les 32 du jeu : $Card(\Omega) = \binom{32}{8}$.

De plus, Ω est muni de la probabilité uniforme.

1) A : "obtenir au moins un coeur"

$\bar{A}$: "ne pas obtenir de coeur". Il y a 8 coeurs donc une main de $\bar{A}$ est un ensemble de 8 cartes parmi les $32 - 8 = 24$ cartes restantes : $Card(\bar{A}) = \binom{24}{8}$.

$$P(\bar{A}) = \frac{Card(\bar{A})}{Card(\Omega)} = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$$

Donc $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$.

2) B : "obtenir 2 carrés".

Il y a 8 valeurs possibles donc 8 carrés possibles.

Une main de B est un ensemble non ordonné de 2 carrés.

$$Card(B) = \binom{8}{2}.$$

Donc $P(B) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{8}}$.

Exercice 3

1. (a) Le premier tirage ayant lieu dans U, le deuxième aura lieu dans U si et seulement si on tire une boule noire au premier tirage. Ainsi, $U_2 = U_1 \cap N_1$. Donc
$$\boxed{P(U_2) = P(U_1) \times P_{U_1}(N_1) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}}$$

   (b) (U_2, V_2) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(V_2)P_{V_2}(U_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$
$$\boxed{P(U_3) = \frac{5}{18}}$$

2. On cherche $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. D'après la formule des probabilités composées
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_2}(B_3) = P_{U_1}(B_1)P_{V_2}(B_2)P_{U_3}(B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$
car ici on commence dans l'urne U puis on change d'urne à chaque tirage.
$$\boxed{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{9}.}$$

3. On cherche $P_{B_2}(U_2)$. D'après la formule de Bayes
$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)}.$$
Or, $P(U_2) = \frac{1}{3}$, $P_{U_2}(B_2) = \frac{2}{3}$. Cherchons $P(B_2)$. D'après la formule des probabilités totales (comme en 1b)
$$P(B_2) = P(U_2)P_{U_2}(B_2) + P(V_2)P_{V_2}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{18}.$$
Donc
$$\boxed{P_{B_2}(U_2) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}.}$$

4. (a) (U_n, V_n) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1})$$
Or $P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_n}(N_n) = \frac{1}{3}$ car, si U_n est réalisé, U_{n+1} signifie que l'on ne change pas d'urne.

   $P_{V_n}(U_{n+1}) = P_{V_n}(B_n) = \frac{1}{4}$ car, si V_n est réalisé, U_{n+1} signifie que l'on change d'urne.

   Donc
$$\boxed{P(U_{n+1}) = \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)}.$$

   (b)
```python
def PU(n) :
    p = 1  # P(U1)
    for k in range(1, n) : # ou range(0,n-1)
        p = 1/4 + 1/12*p
    return(p)
```

5. La suite (p_n) est arithmético-géométrique.
$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}x \Leftrightarrow 12x = 3 + x \Leftrightarrow 11x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{11}$$
Posons alors $v_n = p_n - \frac{3}{11}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}p_n - \frac{3}{11} = \frac{1}{12}\left(v_n + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{44} = \frac{1}{12}v_n$$
La suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{3}{11} = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.

   On en déduit que $\boxed{p_n = v_n + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}}$

6. En reprenant le raisonnement de la question 4a,
$$P(B_n) = P(U_n)P_{U_n}(B_n) + P(V_n)P_{V_n}(B_n) = p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}p_n + \frac{1}{4}$$
Donc
$$\boxed{P(B_n) = \frac{40}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{4}{11}}$$

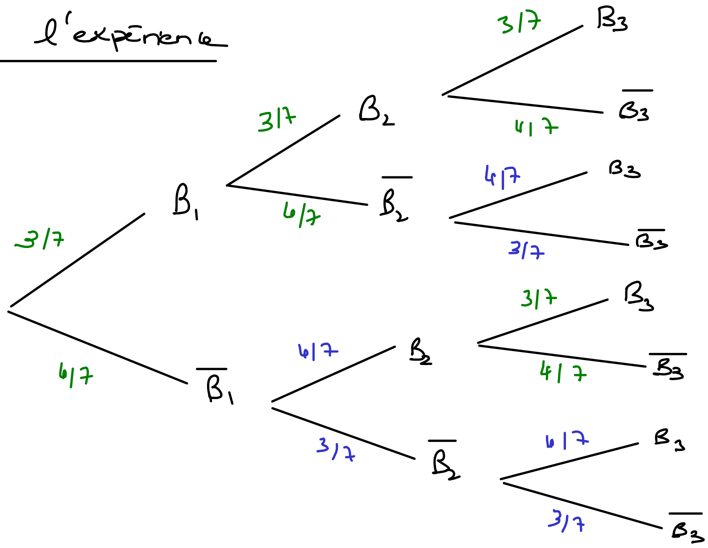
Exercice 4

Notons B_n : " obtenir une boule blanche au n-ième tirage ".

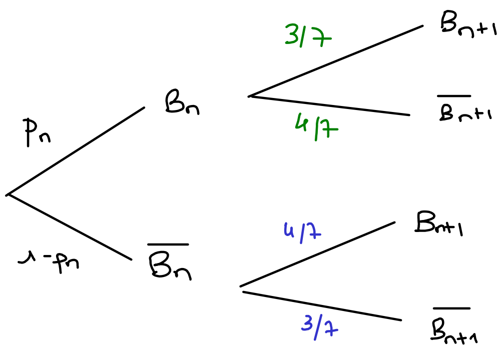
Début de l'expérience

vert : tirages dans U_1

bleu : dans U_2



Tirages n et $n+1$



$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales

$$P(B_{n+1}) = P(B_n)\, P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})\, P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{7} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7}$$

$$p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n .$$

2) $(p_n)_{n\geq 1}$ est arithmético-géométrique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\quad x = \frac{4}{7} - \frac{1}{7}x \iff 7x = 4 - x$

$\iff 8x = 4$

$\iff x = \frac{1}{2}$

Soit $\quad q_n = p_n - \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$q_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}p_n - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{14} - \frac{1}{7}\left(q_n + \frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{7}q_n$$

Donc $(q_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{7}$ et de premier terme $q_1 = p_1 - \frac{1}{2}$

Or $p_1 = P(B_1) = \frac{3}{7}$. Donc $q_1 = \frac{-1}{14}$

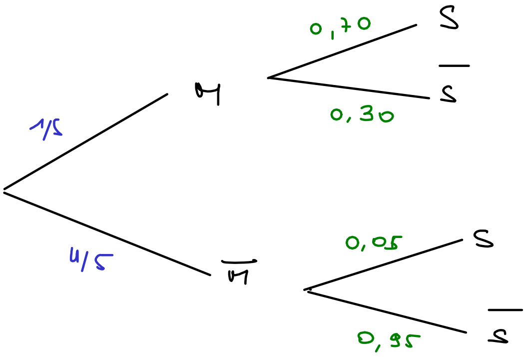
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = -\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}}$

Exercice 5

Notons M : " la personne est malade "

S : " le test est positif "



- $P(M) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

Donc $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = \frac{4}{5}$

- $P_M(S) = 0,70$

$P_{\overline{M}}(\overline{S}) = 0,95$

Donc $P_M(\overline{S}) = 0,3$ et $P_{\overline{M}}(S) = 0,05$

1) $VPP = P_S(M)$. D'après la formule de Bayes

- $VPP = \dfrac{P(M)\, P_M(S)}{P(S)}$

- Calculons $P(S)$. $(M, \overline{M})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(M)\, P_M(S) + P(\overline{M})\, P_{\overline{M}}(S)$$
$$= \frac{1}{5} \times 0,7 + \frac{4}{5} \times 0,05$$
$$= 0,18$$

Donc $VPP = \dfrac{1/5 \times 0,7}{0,18} = \dfrac{0,14}{0,18} \simeq 0,78$. pas efficace

2) si $P(M) = 0,6$, alors en reprenant les calculs

$P(S) = 0,6 \times 0,7 + 0,4 \times 0.05 = 0,44$

$VPP = \dfrac{0,6 \times 0,7}{0,44} \simeq 0,956$ efficace.

Exercice 6

Soient M_k : " la machine M_k est en panne "

S : " le système est en panne "

Méthode 1 : $P(S) = P(M_1 \cup M_2 \cup M_3)$

$= P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) - P(M_1 \cap M_2) - P(M_1 \cap M_3) - P(M_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap M_3)$

$= P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) - P(M_1)P(M_2) - P(M_1)P(M_3) - P(M_2)P(M_3) + P(M_1)P(M_2)P(M_3)$

par indépendance mutuelle de M_1, M_2, M_3

$= p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$

Méthode 2 : $S = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ donc $\overline{S} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}$

$P(\overline{S}) = P(\overline{M_1})\, P(\overline{M_2})\, P(\overline{M_3})$ par indépendance mutuelle de $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \overline{M_3}$

Donc $P(\overline{S}) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

$= (1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2)(1 - p_3)$

$= 1 - p_3 - p_1 - p_2 + p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3$

donc $P(S) = 1 - P(\overline{S})$

$= p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$

2) On cherche $P_S(M_1)$.

D'après la formule de Bayes

$$P_S(M_1) = \frac{P(M_1)\, P_{M_1}(S)}{P(S)}$$

$$= \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3}$$

car $P_{M_1}(S) = 1$: si M_1 est en panne, alors le système est forcément en panne

Exercice 7

Notons F_k : " le k-ième lancer donne Face ".

F_1, F_2, F_3 sont mutuellement indépendants.

* $\overline{A} = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$ union de deux événements incompatibles

$P(\overline{A}) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$

$= P(F_1)\,P(F_2)\,P(F_3) + P(\overline{F_1})\,P(\overline{F_2})\,P(\overline{F_3})$ par indépendance

$= (1-p)^3 + p^3$

Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1-p)^3 - p^3$

* $B = \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3)}_{0 \text{ Pile}} \cup \underbrace{(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3})}_{1 \text{ Pile}}$

Par le même raisonnement, $P(B) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$.

* $A \cap B$: " il est apparu au moins un Pile et au moins une Face

<u>et</u> au plus un Pile "

= " il est apparu exactement un Pile ".

$A \cap B = (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3})$

Donc $P(A \cap B) = 3p(1-p)^2$.

* <u>Si $p = \frac{1}{4}$</u>

$$P(A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{64 - 27 - 1}{64} = \frac{36}{64} = \frac{3^2}{2^4}$$

$$P(B) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27 + 27}{64} = \frac{3^3}{2^5}$$

$$P(A \cap B) = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} = \frac{3^3}{2^6} \neq P(A)\,P(B)$$

A et B ne sont pas indépendants

× Si $p = \frac{1}{2}$

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} = P(A)\,P(B)$$

donc A et B sont indépendants

Conclusion : La notion d'indépendance dépend de la probabilité.