TD PB1 - Corrigé des ADC

ADC1

1) Tirages simultanés

Modélisation : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de deux numéros de $[\![1,9]\!]$. $\text{Card}(\Omega) = \binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$.

Les tirages sont équiprobables donc on considère la probabilité uniforme P sur Ω.

Soient A : " obtenir des numéros de même parité "

B : " obtenir 2 numéros pairs "

C : " obtenir 2 numéros impairs.

$A = B \cup C$ avec B et C incompatibles donc $P(A) = P(B) + P(C)$.

* $P(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Un tirage de B est une combinaison de 2 numéros de $\{2,4,6,8\}$, donc $\text{Card}(B) = \binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$.

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

* $P(C) = \dfrac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}$ et C est l'ensemble des combinaisons de 2 numéros de $\{1,3,5,7,9\}$: $\text{Card}(C) = \binom{5}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$.

$$P(C) = \frac{10}{36}$$

* On a donc $\boxed{P(A) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}}$

2) Tirages successifs avec remise

Modélisation : l'univers Ω est l'ensemble des résultats.

Pour avoir un résultat, on tire successivement deux boules. Il y a 9 possibilités à chaque fois, donc $Card(\Omega) = 9 \times 9 = 81$.

Les tirages sont équiprobables donc on considère la probabilité uniforme P sur Ω.

Soient A : " obtenir des numéros de même parité "

B : " obtenir 2 numéros pairs "

C : " obtenir 2 numéros impairs.

$A = B \cup C$ avec B et C incompatibles donc $P(A) = P(B) + P(C)$.

* $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)}$.

Pour obtenir B, on choisit successivement deux numéros de $\{2, 4, 6, 8\}$. Il y a 4 possibilités à chaque étape.

Donc $Card(B) = 4 \times 4 = 16$

$$P(B) = \frac{16}{81}$$

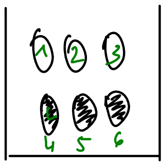
* $P(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)}$. Par un raisonnement analogue,

$Card(C) = 5 \times 5 = 25$ donc $P(C) = \dfrac{25}{81}$.

* On a donc $\boxed{P(A) = \dfrac{16}{81} + \dfrac{25}{81} = \dfrac{41}{81}}$

ADC2

* <u>Cas $n=3$</u> 3 tirages sans remise.



Soit Ω l'univers de l'expérience. Numérotons les boules blanches 1, 2, 3 et les noires 4, 5, 6.

Pour obtenir un résultat :

→ on tire une 1^{ere} boule : 6 possibilités

→ puis on tire une 2^e, sans remise : 5 possibilités

→ puis une 3^e : 4 possibilités.

Donc $\mathrm{Card}(\Omega) = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Ω est ici muni de la probabilité uniforme car il y a équiprobabilité.

Soit A : « obtenir 3 boules noires ».

$\mathrm{Card}(A) = 3 \times 2 \times 1 = 6$ car il y a 3 possibilités pour la 1^{ere} boule, 2 possibilités pour la 2^e et 1 possibilité pour la 3^e.

Donc $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{20}$.

* <u>Cas général</u> : On note Ω l'univers en numérotant les boules blanches $1, 2, \dots, n$ et les noires $n+1, n+2, \dots, 2n$.

$\mathrm{Card}(\Omega) = (2n) \times (2n-1) \times \dots \times (n+1)$

car il y a
$2n$ possibilités pour la 1^{ere} boule
$2n-1$ possibilités pour la 2^e boule
$\vdots$
$2n-(n-1)$ possibilités pour la n^e boule

On a toujours équiprobabilité.

Cherchons $\mathrm{Card}(A)$ dans le cas général.

$\mathrm{Card}(A) = n \times (n-1) \times \dots \times 1$

car il y a
n possibilités pour la 1^{er} boule
$n-1$ pour la 2^e
$\vdots$
$n-(n-1)$ pour la n^e

Ainsi $\quad P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots\times 2\times 1}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}$$

$$= \frac{n!}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)} \times \frac{n(n-1)\cdots\times 2\times 1}{n(n-1)\cdots\times 2\times 1}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

<u>Remarque :</u> on peut aussi modéliser avec des tirages <u>simultanés</u>. Dans ce cas

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \text{Card}(A) = \binom{n}{n} = 1$$

Donc
$$P(A) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

<u>Méthode 3 :</u> <u>Avec les probabilités conditionnelles</u>

Notons N_k : " obtenir une boule noire au k-ième tirage ".

$$A = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n$$

D'après la formule des probabilités composées :

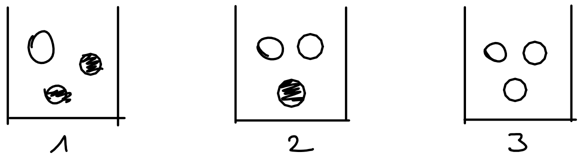
$$P(A) = P(N_1)\, P_{N_1}(N_2) \cdots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{n-1}}(N_n)$$

$$= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2n-(n-1)}$$

$$= \frac{n! \times n!}{(2n)(2n-1)\cdots\times(n+1)\times n!}$$

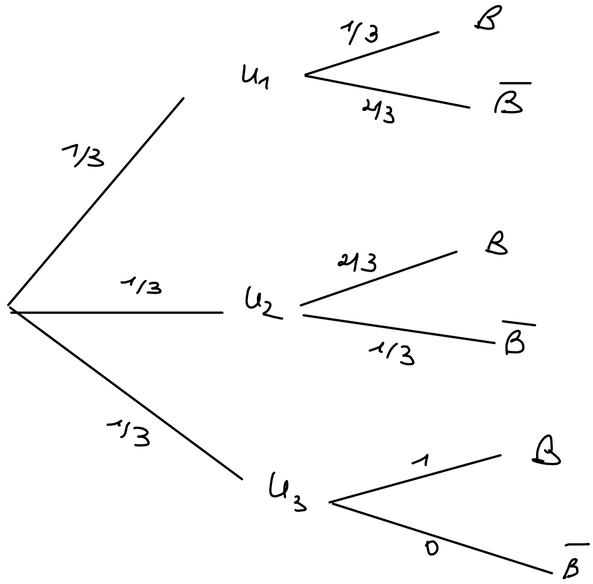
$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

ADC 3



Notons U_k : " on choisit l'urne k "

B : " la boule est blanche ".



(U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(U_1)\,P_{U_1}(B) + P(U_2)\,P_{U_2}(B) + P(U_3)\,P_{U_3}(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 1$$

$$= \frac{2}{3}.$$

2) On cherche $P_B(U_1)$.

D'après la formule de Bayes

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)\,P_{U_1}(B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1/3 \times 1/3}{2/3}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

ADC 4

d_k : résultat du k-ième lancer.

$d_1 + d_2$:

$d_2 \backslash d_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

O : A_1

O : A_2

O : B

L'univers Ω est l'ensemble des éléments de $[\![1,6]\!]^2$.

$$\mathrm{Card}(\Omega) = 36.$$

Il est muni de la probabilité uniforme.

- $\mathrm{Card}(A_1) = 5$ donc $P(A_1) = \dfrac{\mathrm{Card}(A_1)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$
- $\mathrm{Card}(A_2) = 6$ donc $P(A_2) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
- B : " $d_1 = 4$ " Donc $\mathrm{Card}(B) = 6$ donc $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

<u>A_1 et B</u> : $\mathrm{Card}(A_1 \cap B) = \mathrm{Card}(\{4,2\}) = 1$ donc

$$P(A_1 \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A_1)\,P(B)$$

Donc A_1 et B ne sont pas indépendants

<u>A_2 et B</u> $\mathrm{Card}(A_2 \cap B) = 1$ donc

$$P(A_2 \cap B) = \frac{1}{36} = P(A_2)\,P(B)$$

Donc A_2 et B sont eux indépendants.

ADC 5

1) Si $A \cap B = \emptyset$.

A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff 0 = P(A)\,P(B)$

$\iff P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$

2) A et A indépendants $\iff P(A \cap A) = P(A)\,P(A) \iff P(A) - P(A)^2 = 0$

$\iff P(A)\,(1 - P(A)) = 0$

$\iff P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$