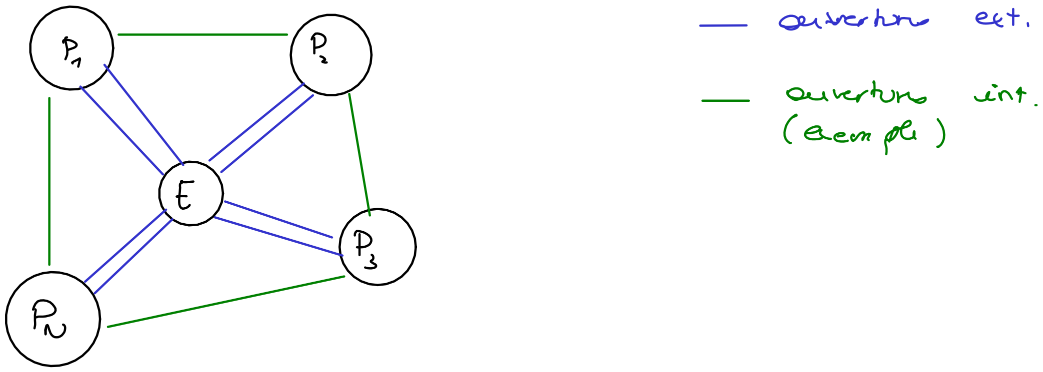
TD AL6 - Corrigé des exercices

Exercice 1

18 ouvertures

M pièces avec 4 ouvertures (2 int + 2 ext)



On modélise par un graphe ayant :

- M + 1 sommets (les pièces + extérieur)
- 18 arêtes.

Les M pièces sont de degré 4 et l'extérieur est de degré 2M.

D'après la formule d'Euler,

$$\sum_{s\in S} \deg(s) = 2\times 18$$

donc $4M + 2M = 36$

donc $M = 6$

Exercice 2

On modélise la situation par un graphe :

- n sommets, les personnes
- les arêtes représentent les connaissances.

Le degré d'une personne est le nombre de personnes qu'elle connaît.

Supposons, par l'absurde, que les degrés soient tous différents.

On a, pour tout sommet s

$$0 \leq \deg(s) \leq n-1$$

Si les n degrés sont deux à deux distincts, alors ils valent $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Si un membre ne connaît personne ($\deg = 0$), alors il ne peut pas y avoir un autre membre qui connaît tout le monde ($\deg = n-1$).

On a une contradiction. Donc il y a bien au moins deux personnes qui ont le même nombre de connaissances.

Exercice 3

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) <u>Initialisation</u> : Pour $k=0$,

$M^{2k+1} = M^1 = M$ et $6^k M = 6^0 M = M$

donc $M^{2k+1} = 6^k M$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^{2k+1} = 6^k M$.

$$M^{2(k+1)+1} = M^{2k+3} = M^{2k+1} \times M^2$$

Or

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 6M$$

Donc $M^{2(k+1)+1} = 6^k M \times M^2 = 6^k M^3 = 6^k \times 6M = 6^{k+1} M$.

<u>Conclusion</u> : par récurrence, $M^{2k+1} = 6^k M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

3) Les chemins de longueur 5 sont associés à la matrice M^5.

$$M^5 = M^{2\times 2+1} = 6^2 M = 36M = \begin{pmatrix} 0 & 36 & 0 & 36 & 0 \\ 36 & 0 & 36 & 0 & 36 \\ 0 & 36 & 0 & 36 & 0 \\ 36 & 0 & 36 & 0 & 36 \\ 0 & 36 & 0 & 36 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 36 chemins de long. 5 entre les sommets 2 et 3.