TD AL6 - Corrigé des ADC

ADC 1

graphe non orienté d'ordre 5.

sommet	A	B	C	D	E
degré	3	0	2	2	3

graphe orienté d'ordre 4.

sommet	A	B	C	D
deg^+	2	2	1	1
deg^-	1	2	1	2
deg	3	4	2	3

graphe non orienté d'ordre 4

sommet	A	B	C	D
degré	3	3	3	3

C'est K_4.

graphe non orienté d'ordre 6

sommet	A	B	C	D	E	F
deg	1	2	1	2	1	1

ADC2

On considère le graphe où les sommets sont les professeurs et où les arêtes représentent les poignées de mains. Ce graphe est non orienté et d'ordre 20.

On cherche le nombre d'arêtes N.

D'après le lemme des poignées de mains (ou formule d'Euler),

$$N = \frac{1}{2} \sum_{s \in G} deg(s)$$

or tout professeur serre la main des 19 autres

donc $deg(s) = 19$ pour tout $s \in G$.

ainsi $N = \frac{1}{2} \sum_{s \in G} 19 = \frac{1}{2} \times 19 \times 20 = 190$

nb termes = nb sommets

ADC3

1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Le nombre de chemins de longueur 4 entre 1 et 4 se trouve dans la matrice A^4.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 6 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 12 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 5 chemins de longueur 4 entre 1 et 4

(1) — (3) — (4) — (5) — (4)

(1) — (2) — (1) — (3) — (4)

(1) — (3) — (1) — (3) — (4)

(1) — (3) — (4) — (3) — (4)

(1) — (3) — (2) — (3) — (4)

3) Le graphe est d'ordre 5 (5 sommets).

$$I_5 + A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 12 & 7 & 2 \\ 11 & 12 & 12 & 7 & 2 \\ 12 & 12 & 18 & 7 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ est à coefficients > 0

donc le graphe est <u>connexe</u>.

ADC4

La matrice d'ajacence est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le graphe est d'ordre 6. Calculons $I_6 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

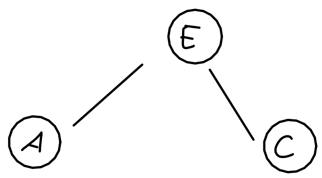
$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 31 & 0 & 14 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 11 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $(1,2)$ de $I_6 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$

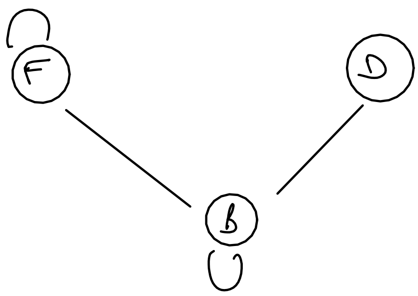
vaut $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Donc le graphe n'est pas connexe, on ne pourra jamais relier A et B.

Cela se voit sur le dessin : il y a deux sous-graphes indépendants



et



ADC 5

On veut savoir si ce graphe admet une chaîne eulérienne.

sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
degré	3	3	3	3	4	2	4	2

Il y a 4 sommets de degrés impairs, donc le graphe n'a pas de chaîne eulérienne.