# TD – AN7

## CONTINUITE

## Applications directes du cours

**ADC 1** Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccl} [1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}$$

**ADC 2** Soit $f$ la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Justifier que $f$ est continue sur $]0,1[$.
2. $f$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en 0 ?

**ADC 3** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Justifier que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. $f$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

**ADC 4** Démontrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{2x-4}$ réalise une bijection de $[2,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et déterminer l'expression de la fonction réciproque associée.

**ADC 5** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

**ADC 6** Démontrer que la fonction $g\colon x \mapsto e^{-x} + x$ réalise une bijection de $]-\infty,0]$ dans un intervalle à déterminer. On note $\varphi$ la réciproque associée. Dresser son tableau de variation.

## Exercices

**Exercice 1** On considère la fonction $f : x \mapsto 2 - e^{-x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. Justifier que $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
5. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

**Exercice 2** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x) + \exp(1-x)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\exp(x) + \exp(1-x) = 1 + e$ d'inconnue réelle $x$.
3. Résoudre l'équation $\exp(x) + \exp(1-x) = 1 + e$ d'inconnue réelle $x$.

**Exercice 3** On considère la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$.

1. Étudier la fonction $f$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Préciser la valeur de $u_0$.
4. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{n}$. Quelle est la limte de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Pour aller plus loin

**Exercice 4** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On note $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x - nx$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln(n)]$ et une unique solution $v_n$ sur $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 3$.
4. Soit $n \geqslant 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Exercice 5** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.
Montrer que $f$ est constante, égale à 1 ou $-1$.

**Exercice 6**

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Résoudre l'équation $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Exercice 7** Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que $f$ admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.