TD AN7 : Corrigé des PAPL

Exercice 4

$$f_n(x) = e^x - nx \quad , \quad n \geqslant 3.$$

1) · f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

· $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ car $n > 0$

· et $f_n(x) = e^x \left(1 - n \dfrac{x}{e^x}\right)$ et $\dfrac{x}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

· $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = e^x - n$

$f_n'(x) \geqslant 0 \iff e^x \geqslant n \iff x \geqslant \ln(n)$

par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$		$\ln(n)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

et $f_n(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - n\ln(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$

On a, pour $n \geqslant 3$:

→ f_n est continue sur $]-\infty, \ln(n)]$

→ $f_n'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions

f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(n)]$.

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 0$

$f_n(\ln(n)) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $n > 0$ et $\ln(n) > 1$ ($n \geqslant 3$)

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $]-\infty, \ln(n)]$.

On procède de même sur $[\ln(n), +\infty[$ pour justifier l'existence et l'unicité de v_n.

2) $u_n \in [\ln(n), +\infty[$ donc $u_n \geq \ln(n)$.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc par minoration $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) $f_n(0) = 1 \geqslant 0$ donc $f_n(0) \geq f_n(u_n)$

Par stricte décroissance de f_n sur $]-\infty, 0]$ $(0 \leq \ln(n))$,

$\boxed{0 \leq u_n}$

4) $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n$

$= e^{u_n} - n u_n - u_n$

$= f_n(u_n) - u_n$

$= -u_n$ car $f_n(u_n) = 0$.

or $u_n \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

Par stricte décroissante de f_{n+1} sur $]-\infty, \ln(n+1)]$

(avec $u_n \leq \ln(n) \leq \ln(n+1)$) on a : $u_n \geq u_{n+1}$.

(u_n) est donc décroissante.

5) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc

d'après le théorème de la limite monotone, elle

converge vers un réel $l \geq 0$.

6) Supposons par l'absurde que $l \neq 0$.

On a donc $l > 0$.

On sait que $f_n(u_n) = 0$ ie $e^{u_n} - n u_n = 0$

$n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par produit

$e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{l} \in \mathbb{R}$ donc $e^{u_n} - n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Absurde.

Donc $\boxed{l = 0}$

Exercice 5

Supposons, par l'absurde, que f ne soit pas constante.

Pour tout réel x, $f(x)^2 = 1$ donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.

f n'étant pas constante, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$.

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ et 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Ceci est absurde car $f(x) = 1$ ou -1 pour tout x.

<u>Conclusion</u> : f est constante sur $\mathbb{R}$ et comme $f(x) = \pm 1$, cette constante vaut soit 1 soit -1.

Exercice 6

- Soit $f : x \mapsto x^x = \exp(x \ln(x))$.

Par produit, $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Comme $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée, f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x > 0$,

$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x\ln(x)}$$
$$= \left(\ln(x) + 1\right) e^{x\ln(x)}$$

or $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$

par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$.

et $\ln(x)+1=0 \iff \ln(x)=-1 \iff x=e^{-1}$

De plus $e^{x\ln(x)}>0$ pour tout réel x

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Remarquons que $f'(x)=0$ a un nombre fini de solutions
donc f est strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{e}]$
et strictement croissante sur $[\frac{1}{e},+\infty[$.

$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$ par croissance comparée donc $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	$\|\|$ 1	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{1/2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}=f\left(\frac{1}{2}\right)$

On voit déjà que $\frac{1}{2}$ est une solution.

$$2<e \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2}>\frac{1}{e}$$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{e},+\infty[$, f est injective sur $[\frac{1}{e},+\infty[$ donc $\frac{1}{2}$ est l'unique antécédent de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[\frac{1}{e},+\infty[$.

De plus $f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2}>\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$
et $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left]\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e},1\right[$.

f étant continue et strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{e}[$, le théorème de la bijection assure qu'il y a une deuxième solution sur $]0, \frac{1}{e}[$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{4^{1/4}} = \frac{1}{2^{2\times 1/4}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{4} \in]0, \frac{1}{e}[$

donc c'est bien la 2^e solution cherchée.

<u>Conclusion</u> : il y a deux solutions : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{4}$.

<u>Exercice 7</u>

$f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$$

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$ <u>continue sur $[0,1]$</u> par différence.

$g(0) = f(0) \geq 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \leq 1$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.