

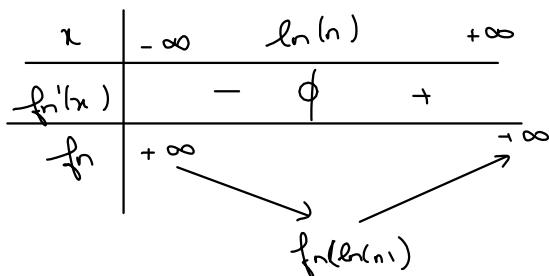
TD ANT : Corrigé des PAPL

Exercice 4

$$f_n(x) = e^x - nx, \quad n \geq 3.$$

1) . f_n est dérivable sur \mathbb{R} .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ car $n > 0$
- et $f'_n(x) = e^x \left(1 - n \frac{x}{e^x}\right)$ et $\frac{x}{e^x} \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} 0$ par croissance comparée, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_n(x) = +\infty$.
- $\forall n \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = e^x - n$
 $f'_n(x) \geq 0 \iff e^x \geq n \iff x \geq \ln(n)$
 par stricte croissance du \ln sur $[0, +\infty]$.



et $f_n(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - n \ln(n) = n - n \ln(n) = n(1 - \ln(n))$

On a, pour $n \geq 3$:

- f_n est continue sur $]-\infty, \ln(n)]$
- $f'_n(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions
- f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(n)]$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$
 $f_n(\ln(n)) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $n > 0$ et $\ln(n) > 1$
 $(n \geq 3)$

D'après le théorème de la bijection,

l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution
 sur $]-\infty, \ln(n)]$.

On procède de même sur $[\ln(n), +\infty]$ pour justifier
 l'existence et l'unicité de u_n .

2) $u_n \in [\ln(n), +\infty[$ donc $u_n \geq \ln(n)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ donc par minoration $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) $f_n(0) = 1 \geq 0$ donc $f_n(0) \geq f_n(u_n)$

Par stricte décroissance de f_n sur $]-\infty, 0]$ ($0 \leq \ln(n)$),

$$\boxed{0 \leq u_n}$$

4) $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n$

$$= e^{u_n} - nu_n - u_n$$

$$= f_n(u_n) - u_n$$

$$= -u_n \quad \text{car } f_n(u_n) = 0.$$

Or $u_n \geq 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

Par stricte décroissance de f_{n+1} sur $]-\infty, \ln(n+1)]$

(avec $u_n \leq \ln(n) \leq \ln(n+1)$) on a: $u_n \geq u_{n+1}$.

(u_n) est donc décroissante.

5) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc

d'après le théorème de la limite monotone, elle

converge vers un réel $l \geq 0$.

6) Supposons par l'absurde que $l \neq 0$.

On a donc $l > 0$.

Or soit que $f_n(u_n) = 0$ si $e^{u_n} - nu_n = 0$

$n u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par produit

$e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^l \in \mathbb{R}$ donc $e^{u_n} - nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Absurde.

Donc $\boxed{l = 0}$

Exercice 5

Supposons, par l'absurde, que f ne soit pas constante. Pour tout réel x , $f(x)^2 = 1$ donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. f n'étant pas constante, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$.

Or f est continue sur \mathbb{R} et 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans \mathbb{R} .

Ceci est absurde car $f(x) = 1$ ou -1 pour tout x .

Conclusion : f est constante sur \mathbb{R} et comme $f(a) = \pm 1$, cette constante peut être 1 soit -1 .

Exercice 6

- Soit $f : x \mapsto x^x = \exp(x \ln(x))$.

Par produit, $x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Comme \exp est dérivable sur \mathbb{R} , par composition,
 f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) e^{x \ln(x)} \\ &= (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)} \end{aligned}$$

or $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$
par stricte croissance de \exp sur \mathbb{R} .

$$\text{et } \ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$$

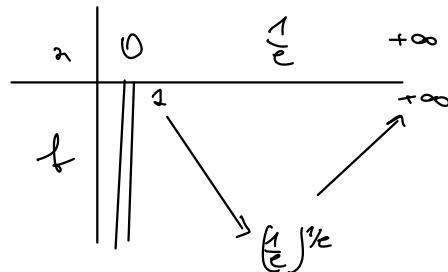
De plus $e^{x\ln(x)} > 0$ pour tout réel x

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	/	-	+

Remarquons qu' $f'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions donc f est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty]$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{par comparaison} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$



$$\bullet \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

On voit déjà que $\frac{1}{2}$ est une solution.

$$2 < e \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{e}, +\infty]$, f est injective sur $[\frac{1}{e}, +\infty]$ donc $\frac{1}{2}$ est l'unique antécédent de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[\frac{1}{e}, +\infty]$.

$$\text{De plus } f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{e}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} > \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$$

$$\text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{donc} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \in \left] \left(\frac{1}{e} \right)^{1/e}, 1 \right[.$$

f étant continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{e}]$,

le théorème de la bijection assure qu'il y a une deuxième solution sur $]0, \frac{1}{2} [$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{4^{1/4}} = \frac{1}{2^{2 \times 1/4}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{4} \in]0, \frac{1}{2} [$

donc c'est bien la 2^e solution cherchée.

Conclusion: il y a deux solutions : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{4}$.

Exercice 7

$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$$

Posons $g: x \mapsto f(x) - x$ continue sur $[0,1]$ par différence.

$$g(0) = f(0) \geq 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \quad \text{car} \quad -f(1) \leq 1.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x)=0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.