TD AN7 : Corrigé des exercices

Exercice 1

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2

2) $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff g(x) = 0$

en posant $g : x \longmapsto f(x) - x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par différence. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-x} - 1$.

$g'(x) > 0 \iff e^{-x} > 1 \iff -x > 0$ par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff x < 0$

$g'(x) = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff -x = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Sur $[0, +\infty[$, $g(0) = f(0) - 0 = 1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

x	0		$+\infty$
g	1	$\searrow$	$-\infty$

- $[0, +\infty[$ est un intervalle
- g est dérivable, donc continue, sur $[0, +\infty[$
- g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ car $g'(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions.

– Notons $J = \left] \lim_{x \to +\infty} g(x), g(0) \right] =]-\infty, 1]$.

$0 \in J$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ (équivalente à $f(x) = x$) admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.

On sait alors : $\alpha \in [0, +\infty[$

$g(\alpha) = 0$ donc $f(\alpha) = \alpha$.

3) $g(1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$ car $2 < e < 3$ donc $e - 1 > 0$ et $e > 0$.

$g(2) = -\frac{1}{e^2} < 0$

Ainsi $g(1) \geq g(\alpha) \geq g(2)$.

Par stricte décroissance de g sur $[0, +\infty[$,

$1 \leq \alpha \leq 2$.

4) Initialisation : $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq \alpha$. (car $\alpha \geq 1$)

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_n \leq \alpha$.

Par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$ (question 1)

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$

Or $f(1) = 2 - \frac{1}{e} \geq 1$ car on a vu que $g(1) \geq 0$ soit $f(1) - 1 \geq 0$

$f(u_n) = u_{n+1}$

$f(\alpha) = \alpha$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \alpha$.

5) $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$

Or $1 \leq u_n \leq \alpha$ et g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc $g(u_n) \leq g(\alpha) = 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$: (u_n) est décroissante.

6) (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

- $1 \leq u_n \leq \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $1 \leq \ell \leq \alpha$
- $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en $\ell \in \mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. On obtient

$$\ell = f(\ell)$$

Donc $\ell = \alpha$ d'après 2).

Exercice 2

1) $f(x) = e^x + e^{1-x} = e^x + e \times e^{-x}$

Par combinaison linéaire, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - e^{1-x}$

$f'(x) > 0 \iff e^x > e^{1-x} \iff x > 1 - x$

$\iff x > \frac{1}{2}$ par stricte croissance de $x \mapsto e^x$

et $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{1/2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2e^{1/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) * $[\frac{1}{2}, +\infty[$ est un intervalle

* f est continue (car dérivable) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

* f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ ($f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions)

* $J = [\, f(\frac{1}{2}), \lim_{x \to +\infty} f(x) [\; = [\, 2e^{1/2}, +\infty[$

Montrons que $1+e \in J$, c'est-à-dire que

$$1+e \geq 2e^{1/2}$$

$1+e \geq 2e^{1/2} > 0 \iff (1+e)^2 \geq 4e$ par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$\iff 1 + 2e + e^2 - 4e \geq 0$

$\iff 1 - 2e + e^2 \geq 0$

$\iff (1-e)^2 \geq 0$ ce qui est vrai

Donc $1+e \in J$.

D'après le théorème de la bijection, $f(x) = 1+e$ a une unique solution dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
De même, il y a une unique solution dans $]-\infty, \frac{1}{2}[$
donc 2 solutions au total.

3) $f(1) = e^1 + e^0 = e + 1 = 1 + e$ donc 1 est la solution sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$f(0) = 1+e$ donc 0 est celle sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

L'ensemble des solutions de $f(x) = 1+e$ est $\{0, 1\}$.

Exercice 3

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit

$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln(x) + 1.$

$f'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1$

$\iff x > e^{-1}$ par stricte croissance de $x \mapsto e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \iff x = e^{-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par produit

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée

$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = e^{-1} \times (-1) = -\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) • f est continue (car dérivable) sur l'intervalle $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

• f est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ ($f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions)

• $n \in [f(\frac{1}{e}), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [-\frac{1}{e}, +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\in [\frac{1}{e}, +\infty[$.

Sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f(x) < 0$ donc $f(x) = n$ n'y a pas de solution. Il y a bien une seule solution au total.

3) u_0 est la solution de $f(x)=0$.

Puisque $f(1) = 1 \ln(1) = 0$, on a $u_0 = 1$.

4) $f(u_n) = n$

$f(u_{n+1}) = n+1 > n = f(u_n)$.

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$

$$u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est croissante (strictement).

5) Soit $n \geq 1$.

$f(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \ln(\sqrt{n})$

$f(u_n) = n$

Or $n - \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \ln(\sqrt{n})\right) \geq 0$

car $\ln(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$ (cours, $\ln(x) \leq x \quad \forall x > 0$)

$\sqrt{n} > 0$.

Donc $f(u_n) \geq f(\sqrt{n})$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$

$$u_n \geq \sqrt{n}.$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par minoration $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.