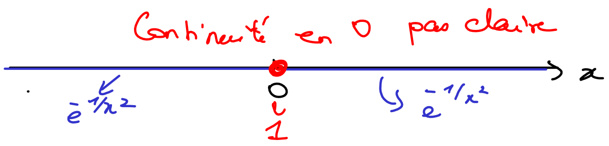
TD AN5 : Corrigé des ADC

ADC 1



(1) * <u>Sur $\mathbb{R}^*$</u>, $f(x) = e^{-1/x^2}$.

$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

* <u>En 0</u>

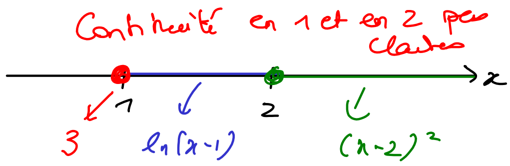
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composée

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 \neq f(0) \quad (\text{car } f(0) = 1)$$

Donc f n'est pas continue en 0.

<u>Conclusion</u> : f est continue sur $\mathbb{R}^*$ uniquement.



(2) * <u>Sur $]1, 2[$</u> : $g(x) = \ln(x-1)$.

$\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc pour $]1, 2[$ et

$\forall x \in]1, 2[, \quad x-1 > 0$

Par composée, g est continue sur $]1, 2[$

* <u>Sur $]2, +\infty[$</u> : $g(x) = (x-2)^2$ donc g y est polynomiale donc continue.

* <u>En 1</u>

$g(1) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ par composée

$\neq g(1)$

Donc g n'est pas continue en 1

* En 2

$g(2) = (2-2)^2 = 0$.

$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 = 0 = g(2)$

$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \ln(x-1) = 0 = g(2)$

Donc $\lim_{\substack{x\to 2 \\ x\neq 2}} g(x) = g(2)$: g est continue en 2.

Conclusion : g est continue sur $]1,+\infty[$ uniquement.

ADC 2

1) $\ln$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$

$$0 < 1-x < 1$$

donc par composée, $x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]0,1[$

De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]0,1[$.

Par produit, f est continue sur $]0,1[$.

2) * En 0

Posons $h = -x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+h)}{-h} = -\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -1$$

par taux d'accroissement usuel.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0

en posant $f(0) = -1$

* En 1 $\quad \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Par composée puis quotient $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \notin \mathbb{R}$

donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

ADC3

1) Sur $]0,+\infty[$

$$f(x) = x^x = \exp(x\ln(x))$$

Par produit $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Puisque exp est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $]0,+\infty[$.

Sur $]-\infty,0[$

$$f(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{x}$$

$x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $\mathbb{R}_-^*$.

Par somme et produit, f est continue sur $]-\infty,0[$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$

2) Si $x>0$ $\quad f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$

Or $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée.

Par continuité de $x \mapsto e^x$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$.

Si $x<0$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^x}{x} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{x}$

$$= e^x \times \frac{e^x-1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ par taux d'accroissement usuel.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

ADC 4

$f : x \longmapsto \sqrt{2x-4}$

* $x \mapsto 2x-4$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc sur $[2,+\infty[$ et

$\forall x \geq 2$, $2x-4 \geq 2\times 2 - 4 = 0$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$ donc par composée, f est définie sur $[2,+\infty[$.

* $\forall x \in [2,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{2x-4} \in [0,+\infty[$.

* Soit $y \in [0,+\infty[$. Soit $x \in [2,+\infty[$.

$$f(x)=y \iff \sqrt{2x-4}=y$$

$$\iff 2x-4 = y^2 \quad \text{car } \sqrt{2x-4} \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

$$\iff x = \frac{y^2+4}{2}$$

Or $y^2 \geq 0$ donc $\frac{y^2+4}{2} \geq \frac{4}{2} = 2$.

Ainsi $f(x)=y$ admet bien une unique solution dans $[2,+\infty[$.

Ainsi f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ et la réciproque est

$$g : [0,+\infty[\longrightarrow [2,+\infty[$$
$$y \longmapsto \frac{y^2+4}{2}$$

ADCS

Soit $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 1$.

f est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$= 3x(x-2)$$

donc

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'équation $f'(x) = 0$ admet 2 solutions donc un nombre fini donc on peut dire que :

- $\rightarrow$ f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$
- $\rightarrow$ f est strictement décroissante sur $[0, 2]$
- $\rightarrow$ f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

De plus, pour $x \neq 0$

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \begin{cases} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>Sur $]-\infty, 0]$</u>, f est continue (polynomiale) et strictement croissante. De plus, $0 \in]-\infty, 1] =]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(0)]$. D'après le théorème de la bijection, $f(x) = 0$ a une unique solution sur $]-\infty, 0]$.
- De même, $f(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, 2]$ et sur $]2, +\infty[$.

<u>Conclusion</u> : $f(x) = 0$ a exactement 3 solutions.

ADC 6

$g : x \longmapsto e^{-x} + x$.

- Par somme, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. donc sur $]-\infty,0]$
- Limite en $-\infty$

soit $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = e^{-x}\left(1 + xe^{x}\right) \qquad \text{car} \quad \frac{x}{e^{-x}} = xe^{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

- Variations

$\forall x \leq 0$, $\qquad g'(x) = -e^{-x} + 1$

Or $-x \geq 0$ donc $e^{-x} \geq 1$ par croissance de exp.

Donc $g'(x) \leq 0$.

De plus $g(x) = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$-$	0
g	$+\infty$	$\searrow$	1

$\rightarrow$ Puisque $g'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions, g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

– De plus elle y est continue (car dérivable).

D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]-\infty,0]$ dans $[g(0), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)[= [1,+\infty[$.

Notons $\varphi : [1,+\infty[\longrightarrow]-\infty,0]$ la réciproque associée

D'après le théorème, φ est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$

$g(0) = 1$ donc $\varphi(1) = 0$

x	1		$+\infty$
φ	0	$\searrow$	$-\infty$