TD AL3 : Pour aller plus loin

Exercice 5

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ a^2b^2 = 4 \\ ab > 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations permettent de dire que

a^2 et b^2 sont les racines de $P(X) = X^2 - 5X + 4$

Les racines de P sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$.

Donc

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions (a, b) est

$$\{ (1,2), \ (-1,-2), \ (2,1), \ (-2,-1) \}$$

Exercice 2

1) $T_2 = 2X\,T_1 - T_0 = 4X^2 - 1$

$T_3 = 2X\,T_2 - T_1 = 2X(4X^2-1) - 2X = 8X^3 - 6X$

2)

Initialisation

$n=0$: $T_0 = 1$. $\deg(T_0) = 0$

$n=1$: $T_1 = 2X$. $\deg(T_1) = 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$

Alors
$$T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$$

$\deg(2X\,T_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = 1 + n+1 = n+2 > \deg(T_n)$

Donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2X\,T_{n+1}) = n+2$

Conclusion : d'après le principe de récurrence double,

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(T_n) = n$

Exercice 3

1) La division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$ s'écrit :

$$\begin{cases} X^n = (X-1)(X-2)\,Q(X) + R(X) & (*) \\ \deg(R) < \deg((X-1)(X-2)) . \end{cases}$$

* $\deg(R) < 2$ donc $R = aX+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
* Évaluons $(*)$ en 1 :

$$1^n = 0 \times Q(1) + R(1) = a+b$$

Évaluons $(*)$ en 2

$$2^n = 0 + R(2) = 2a+b$$

Or
$$\begin{cases} a+b = 1 \\ 2a+b = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-b \\ 2(1-b)+b = 2^n \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-b \\ 2-b = 2^n \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Donc $R = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.