TD AN6 : Correction des exercices

Exercice 1

1) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{a\,x\,(x+1) + b\,(x-1)(x+1) + c\,x\,(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(a+b+c)\,x^2 + (a-c)\,x - b}{x(x-1)(x+1)}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \quad \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \qquad (a+b+c)\,x^2 + (a-c)\,x - b = 2$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a \quad -c = 0 \\ \quad -b \quad = 2 \end{cases} \qquad \text{par identification des coefficients}$$

$$\iff \begin{cases} 2c = 2 \\ a = c \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\quad \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x(x-1)(x+1)}$

2) Soit $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left[\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \qquad \text{par télescopages}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

2e méthode :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \underset{(k \leftarrow k-1)}{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}} - 2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}_{S_n} + \underset{(k \leftarrow k+1)}{\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}}$$

$$= \left(S_n + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \right) - 2 S_n + \left(S_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= (1-2+1) S_n + 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} .$$

Exercice 2

1) Soit $P : x \mapsto ax+b \in \mathbb{R}_1[x]$.

$$\begin{cases} P(-1) = -2 \\ P(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+b = -2 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\iff P : x \mapsto 3x + 1$$

L'ensemble des solutions est $\{ x \mapsto 3x+1 \}$

2) Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{cases} P(-1) = -2 \\ P(0) = 1 \\ P(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c = -2 \\ c = 1 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = -3 \\ c = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -2 \\ c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{ x \mapsto -2x^2 + x + 1 \}$

3) Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{cases} P(-1) = 2 \\ P(1) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 2 \\ 2b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{5}{2} - c \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ x \longmapsto \left(\frac{5}{2} - c\right) x^2 + \frac{1}{2} x + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3

1) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\cline{3-3}
- & (x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2) & x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
 & -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \\
- & (-x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x) & \\
\cline{2-2}
 & 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 & \\
- & (2x^3 + 6x^2 + 6x + 2) & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Le reste est nul donc $(x+1)^3$ divise $f(x)$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^3\,(x^2 - x + 2)$

2) * $(x+1)^3$ a le même signe que $x+1$.

* $x^2 - x + 2$: $\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7 < 0$ donc $x^2 - x + 2 > 0$ pour tout réel x.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$	
x^2-x+2		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4

1) $P_1(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

* On cherche une racine évidente :

$$P_1(1) = 1 + 3 - 5 + 1 = 0$$ donc 1 est racine de P

* On en déduit que $x-1$ divise $P(x)$ pour tout réel x.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 - 5x + 1 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-\ (x^3 - x^2) \qquad\quad & x^2 + 4x - 1 \\
\cline{1-1}
4x^2 - 5x + 1 & \\
-\ (4x^2 - 4x) \quad & \\
\cline{1-1}
-x + 1 & \\
-\ (-x + 1) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x) = (x-1)(x^2+4x-1)$.

$\Delta(x^2+4x-1) = 20 = (2\sqrt{5})^2$.

$$x_1 = \frac{-4-2\sqrt{5}}{2} = -2-\sqrt{5}$$

$$x_2 = -2+\sqrt{5}$$

Donc pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(x-(-2-\sqrt{5}))(x-(-2+\sqrt{5}))$

2) $P_2(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = y^2 - 5y + 6$ où $y = x^2$

Factorisons $y^2 - 5y + 6$.

$\Delta = 25 - 4\times 6 = 1 > 0$. Les racines de $y^2 - 5y + 6$

sont $y_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $y_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Ainsi $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$.

Donc
$$P_2(x) = (x^2-2)(x^2-3)$$
$$= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

Exercice 4

1) $g(2) = 2^3 - 2\times 2^2 - 9\times 2 + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$

donc 2 est racine de g.

2) D'après le cours, $(x-2)$ divise $g(x)$.

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 2x^2 - 9x + 18 & x-2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & & x^2 - 9 \\ \hline & -9x + 18 & \\ - & (-9x+18) & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$

3) Posons $y = e^x$.

$$\begin{aligned} e^{3x} - 2e^{2x} - 9e^x + 18 &= y^3 - 2y^2 - 9y + 18 \\ &= g(y) \\ &= (y-2)(y-3)(y+3) \\ &= (e^x-2)(e^x-3)(e^x+3) \end{aligned}$$

- Or $e^x > 0$ donc $e^x + 3 > 0$.
- $e^x - 2 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 2 \iff \ln(e^x) \geqslant \ln(2)$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$
  $\iff x \geqslant \ln(2)$
- De même, $e^x - 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln(3)$

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x + 3$		$+$		$+$		$+$	
$(e^x-2)(e^x-3)(e^x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $]-\infty, \ln(2)] \cup [\ln(3), +\infty[$.