TD AN4 : Corrigé des PAPL

Exercice 4

1) $\ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty} \underbrace{\ln\big(\overbrace{\ln(e+x)}^{\to 1}\big)}_{\to 0}\right)$ F.I

Soit u tel que $\ln(e+x) = 1+u$

$u = \ln(e+x) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

On sait que $\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$.

$$\frac{1}{x}\ln\big(\ln(e+x)\big) = \frac{1}{x} \times \ln(1+u)$$

$$= \frac{u}{x} \times \frac{\ln(1+u)}{u}$$

$$= \frac{\ln(e+x)-1}{x} \times \frac{\ln(1+u)}{u}$$

Étudions $\frac{\ln(e+x)-1}{x}$ (F.I « $\frac{0}{0}$ »)

$$\frac{\ln(e+x)-1}{x} = \frac{\ln\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)-1}{x}$$

$$= \frac{\ln(e) + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right)-1}{x}$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{x}$$

$$= \frac{\ln(1+h)}{e\,h} \quad \text{avec } h = \frac{x}{e} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$= \frac{1}{e} \times \frac{\ln(1+h)}{h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{e}\times 1\right) = \exp\left(\frac{1}{e}\right)$

2) $f(x) = \ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

$$= \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\ \underbrace{\ln\big(\underbrace{\ln(1+e^{-x})}_{\to 0}\big)}_{\to -\infty}\Big)$$

F. I.

Posons $h = e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$$\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right) = \ln\left(\ln(1+h)\right) = \ln\left(h \times \frac{\ln(1+h)}{h}\right)$$

$$= \ln(h) + \ln\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right)$$

$$= -x + \ln\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right)$$

Donc $\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right) = -1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right)$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ par taux d'accroissement usuel

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \ln\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right) = 0$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right) = -1$

Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \exp(-1) = \frac{1}{e}$.