TD AN4 - Corrigé des exercices

Exercice 1

1) $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

Posons $h = -x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+h)}{-h} = -\frac{\ln(1+h)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$

2) $\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$.

Posons $h = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Rq : $x = h^{1/3}$ valable seulement si $x>0$, $h>0$.

$$\frac{\ln(1+x^3)}{x} = \frac{\ln(1+h)}{h} \times \frac{h}{x} = \frac{\ln(1+h)}{h} \times x^2$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ par taux d'accroissement usuel

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x} = 1\times 0 = 0$.

3) $x\ln(1+e^{-x})$ en $+\infty$

Posons $h = e^{-x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$.

$h = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(h) = -x$

$\Leftrightarrow x = -\ln(h)$

$$x\ln(1+e^{-x}) = -\ln(h)\ln(1+h)$$
$$= -h\ln(h) \times \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} h\ln(h) = 0$ par croissance comparée

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1+e^{-x}) = -0\times 1 = 0$.

Exercice 2

$f : x \mapsto x e^x$.

- $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f également.
- Par croissance comparée, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x e^x = +\infty}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 \times e^x + x e^x = (1+x)\, e^x$$

Or $e^x > 0$ pour tout réel x donc $f'(x)$ est du signe de $1+x$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = -1 e^{-1} = -\frac{1}{e}$

Exercice 3

$f : x \longmapsto 2x^2 - \ln(x)$.

* $x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par combinaison linéaire, f est <u>définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$</u>.

* <u>Limites</u>

  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 2x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty}$.

  - Soit $x > 0$

$$f(x) = x^2\left(2 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ par produit.

* <u>Variations</u>

Soit $x>0$, $f'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x}$

Puisque $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $4x^2-1$.

$$4x^2 - 1 = 0 \iff 4x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm\frac{1}{2}$$

<u>Sur $\mathbb{R}$</u>,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$		$\frac{1}{2} + \ln(2)$		$+\infty$

Exercice 3

1) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est rationnelle donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\}$

c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$. Par composée, f

est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid \frac{x+1}{x-1} > 0\}$.

or

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc f est définie sur $\mathcal{D}f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

2) * $\mathcal{D}f$ est symétrique par rapport à 0

* Soit $x \in \mathcal{D}f$.

$$f(-x) + f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-(\cancel{x-1})}{-(\cancel{x+1})} \times \frac{(\cancel{x+1})}{(\cancel{x-1})}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-1}{-1}\right)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

Donc $f(-x) = f(x)$ et f est impaire.

3) * Soit $x > 1$, $\quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Or $\lim_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$. Donc, par composée,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

* $\lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$ et $\lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+$ (voir q° 1)

Donc, par quotient, $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par composée,

$$\underline{\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}.$$

* Puisque f est impaire,

$$\underline{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\lim_{x \to +\infty} f(x) = -0 = 0}$$

$$\underline{\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\lim_{x \to 1^+} f(x) = -(+\infty) = -\infty}$$

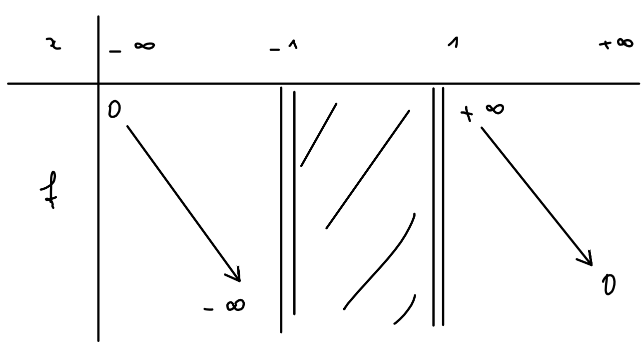
4) $u : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est rationnelle donc dérivable et strictement positive sur D_f. $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, f est dérivable sur D_f.

Soit $x \in D_f$. $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x) = \frac{x+1}{x-1} > 0$ et $u'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$

Donc $f'(x) < 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant :



Exercice 2

$$f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1) $x \mapsto x-1$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est définie sur $\{x \in]0,+\infty[\mid \ln(x) \neq 0\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

exp est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composée et produit, f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2) En $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

En 0

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to 0} (x-1) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

En 1^-

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$.

Or $\lim\limits_{X\to-\infty} \exp(X) = 0$ donc

$\lim\limits_{x\to 1^-} \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$

Par produit, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Remarque : la limite en 1^+ est indéterminée « $0 \times (+\infty)$ ».

3) Notons $g : u \mapsto \ln(1+u) - u$ définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$

car $1+u > 0 \iff u > -1$.

Pour $u > -1$, $g'(u) = \dfrac{1}{1+u} - 1 = \dfrac{-u}{1+u}$

u	-1		0		$+\infty$
$-u$	‖	$+$	0	$-$	
$1+u$	‖	$+$		$+$	
$g'(u)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	↗	0	↘	

$g(0) = \ln(1) - 0 = 0$

g admet un maximum en 0 qui vaut $g(0) = 0$ donc

Pour tout $u > -1$, $g(u) \leq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+u) \leq u$.

3) $u e^{\frac{1}{u}}$ pour $u \to 0^+$

Posons $X = \dfrac{1}{u} \xrightarrow[u \to 0^+]{} +\infty$.

$u e^{\frac{1}{u}} = \dfrac{1}{X} e^X = \dfrac{e^X}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ par croissance comparée

Donc $\lim\limits_{u \to 0^+} u e^{\frac{1}{u}} = +\infty$.

4) Posons $u = x - 1 \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$. Supposons donc $u > 0$

$$f(x) = (x-1) \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = u \exp\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right)$$

or $0 < \ln(1+u) \leq u$

donc $\dfrac{1}{\ln(1+u)} \geq \dfrac{1}{u}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\exp\left(\dfrac{1}{\ln(1+u)}\right) \geq \exp\left(\dfrac{1}{u}\right)$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

Puisque $u > 0$, $u \exp\left(\dfrac{1}{\ln(1+u)}\right) \geq u \exp\left(\dfrac{1}{u}\right)$

Or $\lim\limits_{u \to 0^+} u \exp\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty$.

Par théorème d'existence de limite par minoration,

$$\lim_{u \to 0^+} u \exp\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right) = +\infty$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Exercice 3

1) si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$

donc $f(x) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) si $x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$

donc $f(x) = -x$. Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3) soit $x > 0$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

donc $1 - x < f(x) \leq 1$ car $x > 0$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} (1-x) = 1$ donc par encadrement $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

4) si $x < 0$, $1 - x > f(x) \geq 1$ donc de même

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.