TD AN5 : Corrigé des ADC

ADC 1

1) • $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} 7x = -\infty$ donc par somme $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 7x + 2) = -\infty$

• En $+\infty$, on a « $+\infty - \infty$ ».

Pour $x > 0$, $x^3 + 7x + 2 = x^3 \left(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Par combinaison linéaire, $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = 1$.

De plus, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Par produit, $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 7x + 2) = +\infty$.

F.I ici $(-\infty + \infty)$. Terme prépondérant : x^5.

2) • Soit $x < 0$. $x^5 + 5x^2 - e^x = x^5\left(1 + \frac{5}{x^3}\right) - e^x$

Or $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, $x^5 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, $1 + \frac{5}{x^3} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$

Donc $x^5 + 5x^2 - e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

FI : « $+\infty - \infty$ », terme prépondérant : e^x

• Soit $x > 0$. $x^5 + 5x^2 - e^x = e^x \left(\frac{x^5}{e^x} + 5 \frac{x^2}{e^x} - 1 \right)$

Or $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, $\frac{x^5}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées. Donc

$$x^5 + 5x^2 - e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

3) * $\lim_{x \to 0} x = 0$ et $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0} \left(x - \ln(x)\right) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ donc $\lim_{x \to 0} (3x + \sqrt{x}) = 0^+$

car ici $x > 0$ donc $3x + \sqrt{x} \geq 0$.

Par quotient, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(x)}{3x + \sqrt{x}} = +\infty$.

* $\dfrac{x - \ln(x)}{3x + \sqrt{x}} = \dfrac{x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)} = \dfrac{1 - \frac{\ln(x)}{x}}{3 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$

Or $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée

et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc par quotient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln(x)}{3x + \sqrt{x}} = \frac{1}{3}.$$

4) • $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ par croissance comparée

• $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} x e^x = +\infty.$$

5) * $\lim_{x \to 0} (x+1) = 1$ et $\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \to 0} \ln(1+x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Par quotient, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 0$.

* Soit $x > 1$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)}$$

$$= \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

Or $1+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

« $\frac{0}{+\infty} = 0$ »

Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1$.

6) $$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{1+1} = 1$$

7) $$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{(x+5)-(x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

8) Posons $h = x-4 \xrightarrow[x\to 4]{} 0$

$$\frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \frac{(4+h)^2-16}{(4+h)^2-5(4+h)+4} = \frac{8h+h^2}{3h+h^2} = \frac{8+h}{3+h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{8}{3}$$

Donc $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \frac{8}{3}$

ADC2

1) $f(x) = \ln(x) \times \ln(\ln(x))$ en 1^+

Soit $X = \ln(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$. Puisque $\lim_{X \to 0^+} X \ln(X) = 0$

par croissance comparée alors $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$ (composée)

2) $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$. Soit $h = -x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$f(x) = \frac{e^h - 1}{-h} = -\frac{e^h - 1}{h}$$

Or $\dfrac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$ par taux d'accroissement usuel

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

3) $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^3} = \dfrac{\ln(x^{1/2})}{x^3} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\ln(x)}{x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$

par croissance comparée.

4) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^3} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{x^2}$.

Or $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ par taux d'accroissement usuel.

et $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ car $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0^+$ $(x^2 \geq 0)$

Par produit, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

5) $f(x) = \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\right)$

On pose $h = -\dfrac{2}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$$x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{h} \ln(1+h) = -2 \times \frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -2 \times 1 = -2$$

par taux d'accroissement usuel.

Par composée, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \exp(-2)$

6) $f(x) = \dfrac{e^x - e^3}{x-3}$

Posons $h = x - 3 \xrightarrow[x\to 3]{} 0$.

$f(x) = \dfrac{e^{3+h} - e^3}{h} = e^3 \times \dfrac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} e^3 \times 1 = e^3$

par taux d'accroissement usuel.

ADC3

1) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$

- En $+\infty$: soit $x > 0$. $|x| = x$

  donc $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x} = x + 2 \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$

- En $-\infty$: soit $x < 0$, $|x| = -x$

  donc $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x} = x - 2 \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$

- En 0^+ : si $x > 0$, $g(x) = x + 2 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 2$

- En 0^- : si $x < 0$, $g(x) = x - 2 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} -2$

g n'a pas de limite globale en 0.

2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1+x}{1-x^2} + \dfrac{2}{1-x^2}$ car $1-x^2 = (1-x)(1+x)$

$$= \frac{3+x}{1-x^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $\lim\limits_{x \to 1^+} (1-x^2) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 1} (3+x) = 4$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x^2) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1} (3+x) = 4$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} (1-x^2) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1} (3+x) = 2$ donc $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to (-1)^-} (1-x^2) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -1} (3+x) = 2$ donc $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$

ADC 4

$*$ f est définie en 0 et $f(0) = 0^2 = 0$.

Si $x < 0$

$$f(x) = x^2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

Si $x > 0$

$$f(x) = e^{-1/x}. \quad \text{Or} \quad \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

Conclusion : f admet une limite en 0 et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

$*$ g est définie en 0 et $g(0) = -1$

$$|x(x-1)| = \begin{cases} x(x-1) & \text{si } x(x-1) \geq 0 \\ -x(x-1) & \text{si } x(x-1) < 0. \end{cases}$$

Or

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x(x-1) = x^2 - x$.

Sur $]0,1[$, $g(x) = \dfrac{-x(x-1)}{x} = -x+1$

donc $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \neq g(0)$

Donc g n'admet pas de limite en 0.

Rq : $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1 = g(0)$ cependant.

$*$ h n'est pas définie en 0.

Si $x > 0$

$h(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$. Or $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1$ donc $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$

Si $x<0$

$$h(x) = \frac{xe^x}{1-e^x} = e^x \times \frac{1}{\frac{1-e^x}{x}} = -e^x \times \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ par taux d'accroissement usuel.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

h n'a pas de limite en 0.