TD AN4 - Sommes et produits

Corrigé des APC

APC 1

$$\sum_{k=0}^{10} 3 = \underset{k=0}{3} + \underset{k=1}{3} + \underset{k=2}{3} + \underset{k=3}{3} + \underset{k=4}{3} + \underset{k=5}{3} + \underset{k=6}{3} + \underset{k=7}{3} + \underset{k=8}{3} + \underset{k=9}{3} + \underset{k=10}{3}$$

$$= 3 \times (\text{nombre de termes})$$

$$= 3 \times 11$$

$$= 33$$

$$\sum_{k=1}^{n} 5 = 5 \times (\text{nombre de termes}) = 5 \times n = 5n$$

$$\sum_{i=0}^{3} i^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{30}{60} + \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60}$$

$$= \frac{77}{60}$$

APC 2

$$\prod_{k=0}^{10} 2 = \underset{k=0}{2} \times \underset{k=1}{2} \times \underset{k=2}{2} \times \underset{k=3}{2} \times \underset{k=4}{2} \times \underset{k=5}{2} \times \underset{k=6}{2} \times \underset{k=7}{2} \times \underset{k=8}{2} \times \underset{k=9}{2} \times \underset{k=10}{2}$$

$$= 2^{\text{nombre de termes}}$$

$$= 2^{11} = 2048$$

$$\prod_{k=1}^{n} 5 = 5^{\text{nombre de termes}} = 5^n$$

$$\prod_{i=0}^{3} i! = 0! \times 1! \times 2! \times 3!$$

$$= 1 \times 1 \times 2 \times 6$$

$$= 12$$

$$\prod_{k=1}^{5} \exp(k) = \exp(1) \times \exp(2) \times \exp(3) \times \exp(4) \times \exp(5)$$
$$= \exp(1+2+3+4+5)$$
$$= \exp(15)$$

ou alors

$$\prod_{k=1}^{5} \exp(k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{5} k\right)$$
$$= \exp\left(\frac{5\times 6}{2}\right)$$
$$= \exp(15)$$

ADC3

- $$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! \times (n+1)}{n!} = (n+1)$$

- $$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+1)!\,(n+2)}{n!} = \frac{n!\,(n+1)(n+2)}{n!} = (n+1)(n+2)$$

- $$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}}{n+1}$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

autre rédaction : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

ADC4

* $(i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, donc

$$\sum_{i=10}^{20} i = \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

$$= \frac{10+20}{2} \times (20-10+1)$$

$$= \frac{30}{2} \times 11$$

$$= 15 \times 11$$

$$= 165$$

* $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{N} k \quad \text{avec} \quad N = n+1$$

$$= \frac{N(N+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ou $(k)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

$$= \frac{1+(n+1)}{2} \times (n+1)$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

* $(2k+1)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique donc

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{3+(2n+1)}{2} \times n = n(n+2)$$

ou, par linéarité de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + 1 \times n$$

$$= n(n+1) + n$$

$$= n(n+2)$$

* $3+4+5+\dots+15 = \sum_{k=3}^{15} k$ Or $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

$$= \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

$$= \frac{3+15}{2} \times (15-3+1)$$

$$= 9 \times 13$$

$$= 117$$

ADC 5

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : si $n=1$.

$S_1 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ donc $S_1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Alors $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$ on sort le dernier terme

$$= S_n + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ADC 6

* $(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $2 \neq 1$ donc :

$$\sum_{k=2}^{10} 2^k = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

$$= 2^2 \times \frac{1-2^{(10-2+1)}}{1-2}$$

$$= 4 \times \frac{1-2^9}{-1}$$

$$= 4(2^9-1)$$

$$= 4 \times 511$$

$$= 2044$$

* $$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Or $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4} \neq 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= 1 \times \frac{1-(3/4)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$$

$$= 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

* $$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^k \times 2^1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((-1\times 2)^k \times 2\right)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} (-2)^k$$

Or $((-2)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-2 \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^{k+1}\right) = 2 \times (-2)^1 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$$

$$= -4 \times \frac{1-(-2)^n}{3}$$

$$= -\frac{4}{3}\left(1-(-2)^n\right)$$

ADC 8

Triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Donc, d'après la formule du binôme :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 13a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ADC 9

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$$

$$= (2+1)^n$$

$$= 3^n$$

$$\times \quad \sum_{l=0}^{n} e^{l+1} = \sum_{l=0}^{n} e \times e^{l} = e \sum_{l=0}^{n} e^{l}$$

$$= e \times e^{0} \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e} \qquad \text{car} \quad e \neq 1$$

$$= e \times 1 \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e}$$

$$= \frac{e(1-e^{n+1})}{1-e}$$

ADC 7

$$* \quad \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4 \right) = (n+1)^4 - 0^4 \qquad \text{par télescopage}$$

$$= (n+1)^4$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4 \right) = \left(\cancel{1^4} - 0^4 \right) + \left(\cancel{2^4} - \cancel{1^4} \right) + \left(\cancel{3^4} - \cancel{2^4} \right) + \cdots /$$

$$/ + \left(\cancel{n^4} - \cancel{(n-1)^4} \right) + \left((n+1)^4 - \cancel{n^4} \right)$$

$$= (n+1)^4 .$$

$$* \quad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right)$$

$$= \ln(n+1) - \ln(2) \qquad \text{par télescopage}$$

ou

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right) = \left(\cancel{\ln(3)} - \ln(2) \right) + \left(\cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)} \right) + \left(\cancel{\ln(5)} - \cancel{\ln(4)} \right)$$

$$+ / \cdots / + \left(\cancel{\ln(n)} - \cancel{\ln(n-1)} \right) + \left(\ln(n+1) - \cancel{\ln(n)} \right)$$

$$= -\ln(2) + \ln(n+1) .$$