TD AN2 : Corrigé des ADC

ADC 1

a) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{3}{5}$, $u_3 = \frac{4}{7}$

b) $u_0 = 2$, $u_1 = u_0 + 2^0 = 3$, $u_2 = u_1 + 2^1 = 5$, $u_3 = u_2 + 2^2 = 9$

c) $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 2u_0 - u_1 = 4$, $u_3 = 2u_1 - u_2 = -8$

ADC 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}}$$

Or $n \geqslant 1$ donc $1-n \leqslant 0$ et $2^{n+1} > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

ADC3

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 3 \times (-7)^n$.

Initialisation : $u_0 = 4$ et $1 + 3 \times (-7)^0 = 1 + 3 \times 1 = 4$
donc $u_0 = 1 + 3 \times (-7)^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1 + 3 \times (-7)^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 8 - 7u_n \\ &= 8 - 7\left(1 + 3 \times (-7)^n\right) \\ &= 8 - 7 - 7 \times 3 \times (-7)^n \\ &= 1 + 3 \times (-7) \times (-7)^n \\ &= 1 + 3 \times (-7)^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a :
$u_n = 1 + 3 \times (-7)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ADC 4

Démontrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n - (-4)^n.$$

Initialisation : $u_0 = 0$ et $2^0 - (-4)^0 = 1-1=0$ donc $u_0 = 2^0-(-4)^0$

$u_1 = 6$ et $2^1 - (-4)^1 = 2-(-4) = 2+4 = 6$ donc

$$u_1 = 2^1 - (-4)^1.$$

La propriété est vérifiée aux rangs $n=0$ et $n=1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} u_n = 2^n - (-4)^n \\ \text{et} \\ u_{n+1} = 2^{n+1} - (-4)^{n+1} \end{array} \right.$

Montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2} - (-4)^{n+2}$

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 8u_n - 2u_{n+1} \\
&= 8(2^n - (-4)^n) - 2(2^{n+1} - (-4)^{n+1}) \\
&= 8 \times 2^n - 8 \times (-4)^n - 2 \times \underbrace{2^{n+1}}_{= 2 \times 2^n} + 2 \times \underbrace{(-4)^{n+1}}_{= (-4) \times (-4)^n} \\
&= 2^n \left(8 - 2 \times 2 \right) + (-4)^n \left(-8 + 2 \times (-4) \right) \\
&= 2^n \times 4 + (-4)^n \times (-16) \\
&= 2^n \times 2^2 - (-4)^n \times (-4)^2 \\
&= 2^{n+2} - (-4)^{n+2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence double, on a :

$u_n = 2^n - (-4)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ADC5

1) $u_n = -3 + 5(n-1)$ car $u_1 = -3$

2) $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ car $u_2 = 4$

$$= \frac{2^2}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-4}}$$

ADC 6

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético - géométrique.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = -2x + 7 \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{7}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{7}{3} \\ &= -2u_n + 7 - \frac{7}{3} \\ &= -2\left(v_n + \frac{7}{3}\right) + \frac{14}{3} \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison -2 et de 1er terme $v_0 = u_0 - \frac{7}{3} = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$.

- On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{3} \times (-2)^n$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{(-2)^n}{3}}$

ADC 7

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 0$, (EC) a une racine réelle , $r_0 = 3$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)\, 3^n.$$

Or

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ 3\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2 - \frac{5n}{3}\right) 3^n}$

ADC 8

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5 > 0$. (EC) a deux racines réelles

$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Or

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \sqrt{5}\mu = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

ADC 9

Aucune forme indéterminée ici, je ne détaille pas.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (somme)

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (somme)

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (produit)

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (somme, composée)

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (combinaison linéaire)

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (composée)

ADC 10

← terme dominant

1) $u_n = 6n - 4n^3 + 7\sqrt{n}$ F.I. « $\infty - \infty$ »

Pour $n>0$, $u_n = n^3\left(\dfrac{6}{n^2} - 4 + \dfrac{7\sqrt{n}}{n^3}\right)$

$$= n^3\left(\frac{6}{n^2} - 4 + \frac{7}{n^{5/2}}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{5/2}} = 0$, donc par combinaison linéaire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{n^2} - 6 + \frac{7}{n^{5/2}}\right) = -4$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

2) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$ F.I. « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Pour $n>0$, $u_n = \dfrac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par somme et quotient,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

3) $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{n^5 + 3^n}$. F.I « $\infty - \infty$ » au numérateur puis « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

Au numérateur, le terme dominant est 4^n, au dénominateur c'est 3^n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4^n\left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right)}{3^n\left(\frac{n^5}{3^n} + 1\right)} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \times \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{n^5}{3^n} + 1}$

or • $\frac{4}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$

• $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^5}{3^n} = 0$ par croissance comparée donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^5}{3^n} + 1\right) = 1$$

Par quotient et produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

4) $u_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{2^n}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissance comparée

5) $u_n = (n^2-1)\,e^{-n} = \frac{n^2}{e^n} - \frac{1}{e^n}$.

f.I « $\infty \times 0$ »

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ par croissance comparée

et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

Par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

6) $u_n = 4n - \ln(n) - 2n^5$ f.I : « $\infty - \infty$ »

$\uparrow$ terme dominant

Pour $n > 0$, $u_n = n^5\left(\frac{4}{n^4} - \frac{\ln(n)}{n^5} - 2\right)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^5} = 0$ par croissance comparée

Par combinaison linéaire et produit,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

7) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ FI « $\infty - \infty$ »

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$