TD – AN2

SUITES RÉELLES

Corrigé des PAPL

Exercice 6

1. Notons $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \Leftrightarrow v_n(1+u_n) = u_n \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{v_n - 1}.$$

Ici, $v_n \neq 1$ car $u_n \neq 1 + u_n$.

Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Dans cette question, (u_n) est bornée : il existe un réel positif M tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leqslant u_n \leqslant M.$$

Notons $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_n = w_n(1+u_n^2) = w_n + w_n u_n^2.$$

Montrons que $w_n u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. L'encadrement de u_n suggère d'utiliser le théorème d'encadrement. Comme on ne connaît pas le signe de w_n, on va utiliser les valeurs absolues.

$$|w_n u_n^2| = |w_n| \times |u_n^2| = |w_n| \times u_n^2.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leqslant u_n \leqslant M.$$

Donc

$$0 \leqslant u_n^2 \leqslant M^2.$$

Donc, puisque $|w_n| \geqslant 0$,

$$0 \leqslant |w_n| \times u_n^2 \leqslant |w_n| \times M^2.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} |w_n| \times M^2 = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |w_n \times u_n^2| = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \times u_n^2 = 0$.

Par somme,

$$u_n = w_n + w_n u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Prenons $u_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or,

$$\frac{u_n}{1+u_n^2} = \frac{n}{1+n^2} = \frac{n}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n^2})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 7

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$.

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

donc $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.

2. (a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_n et v_n sont bien définis, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
   Initialisation : $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ sont bien définis, $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et $u_0 \leqslant v_0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : u_n et v_n soient bien définis, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.

- Puisque $u_n v_n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ est bien défini. De plus $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ est bien défini.
- $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et comme $u_n > 0$ et $v_n > 0$, on a bien $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$.
- D'après la question 1 (avec $a = u_n \geqslant 0$ et $b = v_n \geqslant 0$),

$$2\sqrt{u_n v_n} \leqslant u_n + v_n \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \leqslant v_{n+1}.$$

Conclusion : par récurrence, on a bien : u_n et v_n sont bien définis, $u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$ et $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n v_n} - u_n)(\sqrt{u_n v_n} - u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + u_n} = \frac{u_n v_n - u_n^2}{\sqrt{u_n v_n} + u_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + u_n}$$

Or, $u_n \geqslant 0$, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $\sqrt{u_n v_n} + u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} - v_n \leqslant 0$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 8 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}$.
Démontrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3^n - 1$.

Initialisation : Attention, on doit le montrer pour $n \geqslant 1$, donc on commence à $n = 1$!
$3^1 - 1 = 2$ et $u_1 = 1$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 3^1 - 1$.
$3^2 - 1 = 8$ et $u_2 = 3u_1 + \dfrac{1}{u_0} = 4$ donc $1 \leqslant u_2 \leqslant 3^2 - 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant u_n \leqslant 3^n - 1$ et $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3^{n+1} - 1$.
On a : $u_{n+2} = 3u_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}$.
D'une part : $3u_{n+1} \geqslant 3$ et $u_n \geqslant 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{u_n} > 0$. Par somme, $u_{n+2} \geqslant 3 \geqslant 1$.
D'autre part : $3u_{n+1} \leqslant 3(3^{n+1} - 1) = 3^{n+2} - 3$ et $u_n \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$. Par somme, $u_{n+2} \leqslant 3^{n+2} - 2 \leqslant 3^{n+2} - 1$.
On a bien montré : $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant 3^{n+2} - 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3^n - 1$.

2. Soit $a_n = (1 + 2\sqrt{2})^n + (1 - 2\sqrt{2})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_{n+2} - 7a_n &= (1 + 2\sqrt{2})^{n+2} + (1 - 2\sqrt{2})^{n+2} - 7\left((1 + 2\sqrt{2})^n + (1 - 2\sqrt{2})^n\right) \\
&= (1 + 2\sqrt{2})^n \left((1 + 2\sqrt{2})^2 - 7\right) + (1 - 2\sqrt{2})^n \left((1 - 2\sqrt{2})^2 - 7\right) \\
&= (1 + 2\sqrt{2})^n \left(2 + 4\sqrt{2}\right) + (1 - 2\sqrt{2})^n \left(2 - 4\sqrt{2}\right) \\
&= 2(1 + 2\sqrt{2})^{n+1} + 2(1 - 2\sqrt{2})^{n+1} \\
&= 2a_{n+1}.
\end{aligned}$$

(b) Démontrons par récurrence double que a_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $a_0 = (1 + 2\sqrt{2})^0 + (1 - 2\sqrt{2})^0 = 2 \in \mathbb{N}$.
$a_1 = (1 + 2\sqrt{2})^1 + (1 - 2\sqrt{2})^1 = 2 \in \mathbb{N}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \in \mathbb{N}$ et $1a_{n+1} \in \mathbb{N}$.
On a : $a_{n+2} = 7a_n + 2a_{n+1}$.
Puisque $7a_n$ et $2a_{n+1}$ sont des entiers naturels, par somme, a_{n+2} est aussi un entier naturel.

Conclusion : d'après le principe de récurrence double, a_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 1. Démontrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

Initialisation : $u_0 = 1/2$ d'après l'énoncé donc $u_0 \in [0,1]$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0,1]$. $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n(1-u_n)$.

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ donc } 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$$

Par produit de ces deux inégalités (les nombres sont tous positifs) :

$$0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1.$$

De plus $0 < \frac{3}{4} < 1$, donc encore par produit :

$$0 \leqslant \lambda u_n(1-u_n) \leqslant 1.$$

On a donc bien $u_{n+1} \in [0,1]$.

Conclusion : par récurrence, $\boxed{u_n \in [0,1] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

2. Étude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}(u_n)^2 - u_n = -\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}(u_n)^2 \leqslant 0$$

car $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell.}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}(u_n)^2$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (cours) et $\frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}(u_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}\ell - \frac{3}{4}\ell^2$. Donc

$$\ell = \frac{3}{4}\ell - \frac{3}{4}\ell^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} \ell = \frac{3}{4}\ell - \frac{3}{4}\ell^2 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}\ell^2 + \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\ell^2 + \ell = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell(3\ell+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, on en déduit que $\ell = 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

1. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Initialisation : $u_0 = 1$ donc u_0 existe et $u_0 \geqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geqslant 1$. On a $u_n \geqslant 1 > 0$ donc $\sqrt{u_n}$ existe et $\sqrt{u_n} > 0$. Ainsi, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ existe bien.

De plus, $u_n \geqslant 1$ et $\frac{1}{\sqrt{u_n}} \geqslant 0$ donc par somme, $u_{n+1} \geqslant 1$.

Conclusion : par récurrence, $\boxed{u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 1.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} - u_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \geqslant 0.$$
La suite (u_n) est croissante.

3. (u_n) étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite qui est soit réelle, soit égale à $+\infty$.

Montrons par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Supposons donc que la limite de (u_n) soit un réel ℓ.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ donc par passage à la limite $\ell \geqslant 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (cours) et $u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \frac{1}{\ell}$ (car $\ell \neq 0$). Donc
$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\ell} = 0.$$

Ceci est impossible. On a une contraction, donc notre hypothèse de départ est fausse : (u_n) ne peut pas tendre vers un réel.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.