

## TD – AN2

## CORRIGÉ DES PAPL

**Exercice 6**  $|2x + 1| \geq x - 3$ 

Ensemble de définition :  $\mathbb{R}$ .

**Premier cas** : si  $2x + 1 \geq 0$  (c'est-à-dire  $x \geq -\frac{1}{2}$ )

$$|2x + 1| \geq x - 3 \iff 2x + 1 \geq x - 3 \iff x \geq -4$$

Ici l'ensemble des solutions est  $S_1 = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ .

**Second cas** : si  $2x + 1 < 0$  (c'est-à-dire  $x < -\frac{1}{2}$ )

$$|2x + 1| \geq x - 3 \iff -(2x + 1) \geq x - 3 \iff -3x \geq -2 \iff x \leq \frac{2}{3}$$

Ici l'ensemble des solutions est  $S_2 = ]-\infty, -\frac{1}{2}]$ .

Conclusion : L'ensemble des solutions est  $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$

**Exercice 7** On pose  $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ . On pourra faire deux cas, suivant le signe de  $x$ .

**Ensemble de définition** :  $x \mapsto x^2 + 1$  et  $x \mapsto x$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  (polynomiales) et  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ . Par composée puis différence,  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$  est définie sur  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$ .

**Premier cas** : si  $x \leq 0$ , on a  $-x \geq 0$  et  $\sqrt{x^2 + 1} > 0$  donc  $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ .

**Second cas** : si  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 &\iff \sqrt{x^2 + 1} > x \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{x^2 + 1})^2 > x^2 \quad \text{cas la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff x^2 + 1 > x^2 \\ &\iff 1 > 0 \end{aligned}$$

Puisque la dernière inégalité est vraie, celle de départ aussi, c'est-à-dire  $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ .

**Conclusion** : pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

2. Justifier que  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto x^2 + 1$  et  $x \mapsto x$  sont définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  (polynomiales) et  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or, pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}_+^*$ .

Par composée puis différence,  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $\ln$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or, pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} - x \in \mathbb{R}_+^*$ . Par composée,  $f$  est donc définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que  $f$  est impaire.

L'ensemble de définition de  $f$  ( $\mathbb{R}$ ) est centré en 0.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

Il n'est pas évident que  $f(-x) = -f(x)$ . Pour le montrer, calculons  $f(-x) + f(x)$  (et montrons que cette quantité est nulle).

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= \ln\left((\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)\right) \\ &= \ln(x^2 + 1 - x^2) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc  $f(-x) = -f(x)$  et  $f$  est impaire.

4. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

Remarque : celle en  $-\infty$  est plus simple (pas de F.I.)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$  par composée simple et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = +\infty$ . Or,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$  donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Puisque  $f$  est impaire,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

5. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

Pour tout réel  $x$ , en notant  $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ,

$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Puis,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$-\infty$