# TD AN2 - Exercices

## Exercice 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \iff 2ab \leq a^2+b^2$$
$$\iff a^2+b^2-2ab \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2 \geq 0$$

Puisque $(a-b)^2 \geq 0$ est vraie, par équivalence,

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ est vraie également.

## Exercice 2

1) $f$ est rationnelle, définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}.$$

2) $f$ est rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

Or $(2x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x(x-1) = 2x^2-2x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↗ | $0$ | ↘ | \|\| | ↘ | $1$ | ↗ | |

$f(0) = 0$

$f(1) = \frac{1}{2-1} = 1$

Conclusion : $f$ est croissante sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$

et décroissante sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$.

3) <u>Position relative</u> : on étudie le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{2x+1}{4} = \frac{4x^2 - (2x+1)(2x-1)}{4(2x-1)}$$

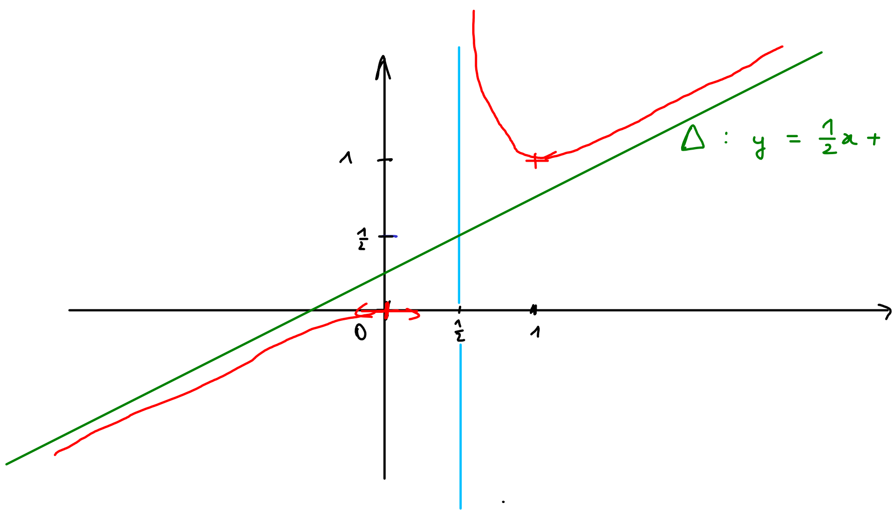
$$= \frac{1}{4(2x-1)}$$

$\frac{1}{4} > 0$ donc $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$ est du signe de $2x - 1$.

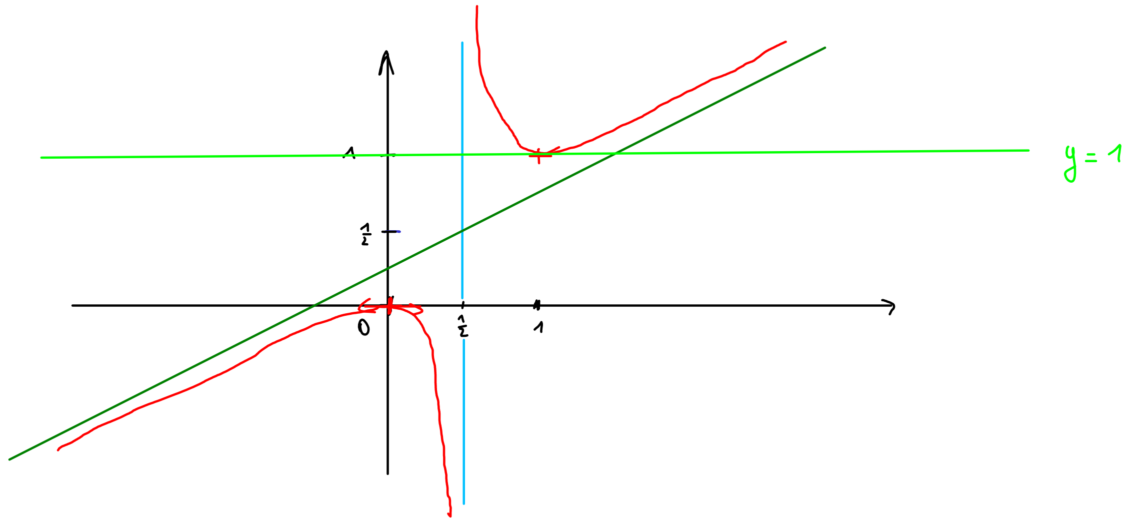
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\Delta$ sur $]-\infty, 1/2[$ et au dessus sur $]1/2, +\infty[$.

4)



5)




Graphiquement, $f(x) \geqslant 1$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

<u>Calcul</u> : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$$f(x) \geqslant 1 \iff \frac{x^2}{2x-1} - 1 \geqslant 0 \iff \frac{x^2 - 2x + 1}{2x-1} \geqslant 0 \iff \frac{(x-1)^2}{2x-1} \geqslant 0$$

| | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)^2$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $\frac{(x-1)^2}{2x-1}$ | | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $+$ | |

Donc $f(x) \geqslant 1$ pour $x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$.

## Exercice 3

$$f(x) = x^x$$

Puissance variable → forme exponentielle

$$\boxed{f(x) = \exp(x\ln(x))}$$

* Ensemble de définition.

$x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Par produit, $x \mapsto x\ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, $x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

* Dérivée

Pour $x>0$, $f(x) = \exp(u(x))$

avec $u(x) = x\ln(x)$

$u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$

Donc

$$f'(x) = u'(x) \times \exp(u(x))$$
$$= (\ln(x)+1) \times \exp(x\ln(x))$$

* Signe de la dérivée

$\exp(x\ln(x)) > 0$ pour tout $x>0$.

donc $f'(x)$ a le même signe que $\ln(x)+1$.

Pour $x>0$,

$$\ln(x)+1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1$$

$$\iff \exp(\ln(x)) \geq \exp(-1)$$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

$$\iff x \geq \frac{1}{e}.^{*}$$

* $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ | $\searrow$ | $e^{-1/e}$ | $\nearrow$ | |

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{e}\right)^{*}$$
$$= e^{-1/e}$$

$^{*}$ $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$

<u>Conclusion :</u> $f$ est décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

## Exercice 4

1) $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Par composée, $f$ est définie sur

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \;\middle|\; \frac{x+1}{x-1} > 0 \right\}$$

Or

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{x+1}{x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

Donc $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$

2) • $D_f$ est symétrique par rapport à $0$.

• Soit $x \in D_f$.

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= -f(x)$$

Autre méthode :

$$f(-x) + f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1} \times \frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(-x+1)(x+1)}{(-x-1)(x-1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-x^2+1}{-x^2+1}\right)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

donc $f(-x) = -f(x)$.

Conclusion : <u>$f$ est impaire</u>.

3) • $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc, comme en 1),

$f$ est dérivable sur $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ = \mathcal{D}_f$.

• Pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

avec

$$u'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

et $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1} > 0$ d'après 1)

Donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

<u>Conclusion</u> : $f$ est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $\Vert$ | | $\Vert$ | $\searrow$ |

## Exercice 5

* Ensemble de définition : $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ l'est sur $[0, +\infty[$. Donc l'ensemble de définition est

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[.$$

* ⚠ $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ valable uniquement si $a \geq 0$ et $b \geq 0$

Ici : $a = \sqrt{x+1} \geq 0$ mais $b = x$ peut être négatif car $x \in [-1, +\infty[$.

Cas 1 : si $x \geq 0$

On a $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $x \geq 0$ donc, par stricte croissance de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} > x &\iff \left(\sqrt{x+1}\right)^2 > x^2 \\
&\iff x+1 > x^2 \\
&\iff x^2 - x - 1 < 0
\end{aligned}$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.

$x^2 - x - 1 = 0$ a deux solutions : $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

⚠ Ici $x \in [0, +\infty[$ dans notre cas 1

Dans ce cas 1, $\sqrt{x+1} > x \iff x \in [0, x_2[$.

Cas 2 : $-1 \leq x < 0$

Dans ce cas, $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $x < 0$ donc $\sqrt{x+1} > x$ est vrai.

Conclusion : les solutions sont $[-1, 0[ \cup [0, x_2[ = [-1, x_2[$

$$= \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$