TD AN2 - ADC

ADC 1

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) - 6$$

$$= \frac{\ln(1+x^2)^2}{x^2} - \frac{2\ln(1+x^2)}{x} - 6$$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2-2x-6) = \frac{\ln(1+(x^2-2x-6)^2)}{x^2-2x-6}$$

$$= \frac{\ln(x^4-4x^3-8x^2+24x+37)}{x^2-2x-6}$$

ADC 2

1) $f : x \mapsto x^2 + 7x^4$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+7}$ est rationnelle. Elle est définie sur

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x+7 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-7\}.$$

3) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$

$x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$. Par quotient, f est définie sur

$$\{x \in]0,+\infty[\mid \ln(x) \neq 0\}$$

c'est-à-dire sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

4) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$. Par composée, f est définie sur :

$$D_f = \{x \in]0,+\infty[\mid \ln(x) \in [0,+\infty[\}$$

$$= [1,+\infty[$$

car :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

ADC 3

- $x \mapsto 4-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et $\ln$ sur $]0,+\infty[$.

  Par composée, $x \mapsto \ln(1-x^2)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 4-x^2>0\} =]-2,2[$$

car

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par somme, <u>f est définie sur $]-2,2[$.</u>

* • $]-2,2[$ est symétrique par rapport à 0.

• Soit $x \in]-2,2[$

$$f(-x) = \ln(4-(-x)^2)$$
$$= \ln(4-x^2)$$
$$= f(x)$$

Donc <u>f est paire</u>.

ADC 4

1) Sommes

a) f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2 \times 2x + 3 \times 4x^3 - 0$$
$$= 4x + 12x^3$$

b) $x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par combinaison linéaire, $f : x \mapsto \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + (-e^{-x})\right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Rq : dérivée de $x \mapsto e^{ax}$ $\rightsquigarrow$ $a e^{ax}$ (ici $a = -1$)

c) $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

Par combinaison linéaire, f l'est également.

$$f'(x) = 8 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{8}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{16 + \sqrt{x}}{2x}$$ car $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$

d) $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$. Par combinaison linéaire, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{6}{x^2}$$

e) f est une fonction puissance réelle (non entière), donc définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Rq : dérivée de $x \mapsto x^{a}$ $\rightsquigarrow$ $a x^{a-1}$
avec a constante
ici $a = \frac{3}{2}$

f) Pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$$

f est une puissance réelle, dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc $$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-1/2 - 1} = -\frac{1}{2} x^{-3/2} = -\frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Rq : On peut aussi voir un quotient.

2) Produits

a) $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

Par produit, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$f(x) = x\ln(x) = u(x) \times v(x)$$

avec $u(x) = x$ $\quad\quad$ $v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = 1$ $\quad\quad$ $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}$$
$$= \ln(x) + 1.$$

b) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par produit, f l'est également.

$$f(x) = x^2\, e^x = u(x) \times v(x)$$

avec $u(x) = x^2$ $\quad\quad$ $v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x$ $\quad\quad$ $v'(x) = e^x$

Donc

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= 2x \times e^x + x^2 \times e^x$$
$$= 2x\,e^x + x^2\,e^x$$
$$= e^x\,(2x + x^2)$$

c) . $x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

. $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$

donc $x \mapsto 2x + \sqrt{x}$ l'est sur $]0,+\infty[$ par somme

. Par produit, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$f(x) = e^{3x}\left(\sqrt{x} + 2x\right) = u(x) \times v(x)$$

avec $\quad u(x) = e^{3x} \qquad v(x) = \sqrt{x} + 2x$

$\qquad u'(x) = 3e^{3x} \qquad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2$

Donc

$$f'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$
$$= 3e^{3x}\left(\sqrt{x} + 2x\right) + e^{3x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)$$

3) Quotients

a) f est rationnelle donc dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \neq 0\}$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $\quad u(x) = x^2+1 \qquad v(x) = x-3$

$\qquad u'(x) = 2x \qquad v'(x) = 1$

Donc $\quad f'(x) = \dfrac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v(x)^2}$

$$= \frac{2x(x-3) - (x^2+1)\times 1}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2}$$

b) $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

Par quotient, f est dérivable sur $\{x \in \,]0, +\infty[\mid x \neq 0\}$ c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = \ln(x)$ $\quad v(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1.$

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

c) . $x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par somme $x \mapsto e^{x} + e^{-x}$ aussi.

. $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et <u>ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$</u>.

Par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{x^2 + 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = e^{x} + e^{-x}$ $\quad v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = e^{x} - e^{-x}$ $\quad v'(x) = 2x$

Donc $$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{(e^{x} - e^{-x})(x^2+1) - (e^{x} + e^{-x}) \times (2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^{x}(x^2 - 2x + 1) - e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

4) Composées

a) $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composée, f l'est aussi.

$$f(x) = e^{x^2} = e^{u(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} u(x) &= x^2 \\ u'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = 2x e^{x^2}$

b) $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Par composée, f est dérivable sur

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^* \;\middle|\; \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^*.$$

$$f(x) = e^{1/x} = e^{u(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{x} \\ u'(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

c) $x \mapsto 3x+5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Par composée, f est dérivable sur

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3x+5 \in]0, +\infty[\right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3x+5 > 0 \right\}.$$

Or $3x+5 > 0 \iff 3x > -5 \iff x > -\frac{5}{3}$

Donc f est dérivable sur $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

$$f(x) = \ln(3x+5) = \ln(u(x)) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} u(x) &= 3x+5 \\ u'(x) &= 3 \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{3x+5}$$

d) $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto e^x - 3$ sur $\mathbb{R}$

par somme. Par composée, f est dérivable sur :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid e^x - 3 > 0 \}$$

Or $e^x - 3 > 0 \iff e^x > 3$

$\iff \ln(e^x) > \ln(3)$ car ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\iff x > \ln(3)$.

Donc f est dérivable sur $]\ln(3), +\infty[$.

$$f(x) = \sqrt{e^x - 3} = \sqrt{u(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} u(x) = e^x - 3 \\ u'(x) = e^x \end{array}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$= \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 3}}$$

e) $x \mapsto e^{-2x}$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par combinaison

linéaire puis puissance entière positive (puissance constante),

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (e^{-2x} + 3x^2)^5 = u(x)^5 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} u(x) = e^{-2x} + 3x^2 \\ u'(x) = -2e^{-2x} + 6x \end{array}$$

Donc

$$f'(x) = 5\, u'(x)\, u(x)^{5-1}$$

$$= 5\left(-2e^{-2x} + 6x\right)\left(e^{-2x} + 3x^2\right)^4$$

f) $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par inverse, f

est dérivable sur $\{ x \in]0, +\infty[\mid \ln(x) \neq 0 \} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{u(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{1/x}{\ln(x)^2} = -\frac{1}{x\ln(x)^2}$$

5) <u>Divers</u>

a) • $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• $x \mapsto 1-x^3$ (polynomiale) et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composée, $x \mapsto e^{1-x^3}$ aussi.

Par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x\, e^{1-x^3} = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{1-x^3} = e^{w(x)}$

$u'(x) = 1$

avec $w(x) = 1-x^3$

$w'(x) = -3x^2$

donc $v'(x) = w'(x)\, e^{w(x)}$

$= -3x^2\, e^{1-x^3}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \\ &= 1 \times e^{1-x^3} + x \times \left(-3x^2\, e^{1-x^3}\right) \\ &= e^{1-x^3}\left(1 - 3x^3\right) \end{aligned}$$

b) $x \mapsto x+3$ (affine), $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par produit et quotient, f est dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x e^{-x} \neq 0\}.$$

Or $x e^{-x} = 0 \iff x = 0$ car $e^{-x} > 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f(x) = \frac{x+3}{x e^{-x}} = \frac{u(x)}{v(x)}$$ avec $u(x) = x+3$, $u'(x) = 1$

et
$$v(x) = x e^{-x} = h(x) \times g(x)$$

avec $h(x) = x$, $h'(x) = 1$; $g(x) = e^{-x}$, $g'(x) = -e^{-x}$

Donc
$$v'(x) = h'(x)\, g(x) + h(x)\, g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$$

puis
$$f'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v(x)^2}$$
$$= \frac{1 \times e^{-x}(1-x) - (x+3) \times x e^{-x}}{(x e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{-x} - x e^{-x} - x^2 e^{-x} - 3x e^{-x}}{(x e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^{-x}(1 - 4x - x^2)}{x^2 (e^{-x})^2}$$
$$= \frac{1 - 4x - x^2}{x^2 e^{-x}}$$

c) $x \mapsto (2x+5)^{10}$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

ou $x \mapsto 2x+5$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x^{10}$ est également polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 10 \times 2 \times (2x+5)^9 = 20\,(2x+5)^9$$ $(u^{10})' = 10\, u' u^9$

d) $x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$ ⚠ Puissance variable → forme exp.

$x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Par produit, $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

De plus $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée,

$f : x \mapsto x^{1/x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Soit $x>0$, $f(x) = \exp(u(x))$

avec $u(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$. $u'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\exp(u(x)) \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2}x^{1/x} \end{aligned}$$

e) $x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1}$ est rationnelle donc dérivable sur

$\{x\in\mathbb{R} \mid x-1\neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Par composée, f est dérivable sur

$\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \;\middle|\; \frac{x^2+1}{x-1}>0\right\}$.

Or

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x^2+1	$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+1}{x-1}$	$-$	$\Vert$	$+$

$x^2+1 \geq 1 > 0$

Donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \ln\left(u(x)\right)$$

avec $$u(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{v(x)}{w(x)}$$

avec $v(x) = x^2+1$ $\quad$ $w(x) = x-1$

$v'(x) = 2x$ $\quad$ $w'(x) = \underline{1}$

Donc $$u'(x) = \frac{v'(x)\, w(x) - v(x)\, w'(x)}{w(x)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1) - (x^2+1)\times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

ADC 5

1) • $x \mapsto x^3+1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 + 1 \leq 0 \iff x^3 \leq -1$$

$$\iff x^3 \leq (-1)^3$$

$$\iff x \leq -1$$ car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) • $x \longmapsto x-1$ et $x \mapsto x^2+2$ sont définies sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

<u>Domaine de définition</u> :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq 0 \text{ et } x^2+2 \geq 0 \} = [1, +\infty[$$

car, pour tout réel x, $x^2+2 \geq 2 \geq 0$ (car $x^2 \geq 0$)

On peut aussi dire que $\Delta(x^2+2) = -8 < 0$ donc $x^2+2 > 0$.

• Soit $x \geq 1$

$0 \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2+2} \iff x-1 \leq x^2+2$ car $x \mapsto x^2$ (ou $x \mapsto \sqrt{x}$) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\iff x^2 - x + 3 \geq 0$$

$\Delta = 1 - 12 < 0$. donc $x^2 - x + 3 \geq 0$ est toujours vraie.

L'ensemble des solutions est $[1, +\infty[$.