

TD AN1 - Corrigé

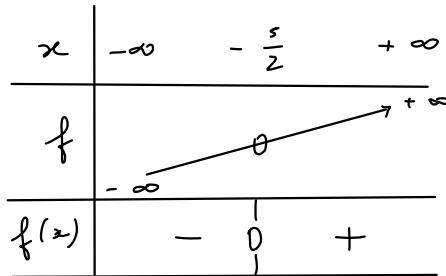
ADC 1

$f: x \mapsto 2x + 5$ est une fonction affine de coefficient dominant $2 > 0$, donc elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$2x + 5 = 0 \iff 2x = -5 \iff x = -\frac{5}{2}$$

On a :

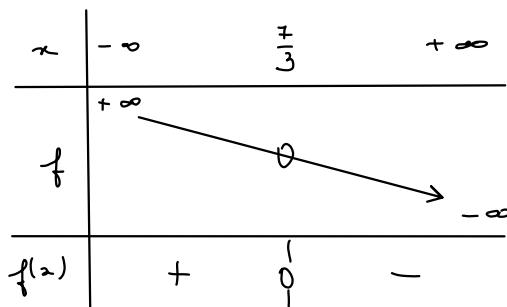


ADC 2

$f: x \mapsto 7 - 3x$ est une fonction affine de coefficient dominant $-3 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$7 - 3x = 0 \iff x = \frac{7}{3}$$



ADC3

$f: x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$ est une fonction polynomiale du second degré, de coefficient dominant $a = 2 > 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24 < 0$.

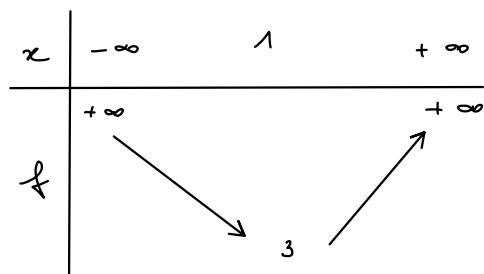
Donc $f(x)$ est du signe de $a > 0$.

x	-	+	$+\infty$
$f(x)$		+	

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0$$

Puisque $a > 0$, f admet un minimum en $- \frac{-4}{2 \times 2} = 1$

qui vaut $f(1) = 2 - 4 + 5 = 3$.



ADC4

$f: x \mapsto 2 - 3x^2 - x$ est une fonction polynomiale du second degré de coefficient dominant $a = -3 < 0$. Son discriminant est $\Delta = 25 > 0$.

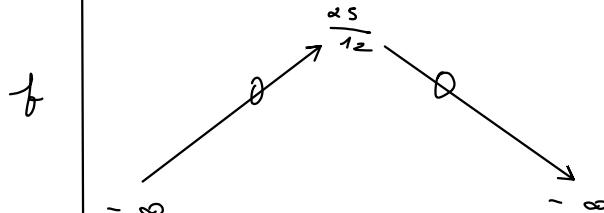
f admet deux racines : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

$$\text{et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

Il y a un maximum en $- \frac{-1}{2 \times (-3)} = -\frac{1}{6}$, qui vaut :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{6}\right) &= 2 - 3 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{3}{36} + \frac{1}{6} \\ &= 2 - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{24 - 1 + 2}{12} = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

x	-	-	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0



ADC 5

- $144 = 12^2$ donc $\sqrt{144} = 12$
- $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

ADC 6

$$A = \frac{e^{\ln(3)} + \exp(s)^2 - 3}{e^7 \times \exp(-2)}$$

$$= \frac{3 + (e^s)^2 - 3}{e^7 \times e^{-2}}$$

$$= \frac{e^{10}}{e^s}$$

$$= e^s$$

$$\begin{aligned} B &= \ln((e + e^{-1})^2 - e \times (\exp(1) - \exp(-3)) - 2) \\ &= \ln(e^2 + 2 \times e \times e^{-1} + e^{-2} - e(e^1 - e^{-3}) - 2) \\ &= \ln(e^2 + 2e^0 + e^{-2} - (e^2 - e^{-2}) - 2) \\ &= \ln(\cancel{e^2} + \cancel{2} + \cancel{e^{-2}} - \cancel{e^2} + \cancel{e^{-2}} - \cancel{2}) \\ &= \ln(2e^{-2}) \\ &= \ln(2) + \ln(e^{-2}) \\ &= -\ln(2) - 2 \end{aligned}$$

ADC 7

La propriété " $(-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}}$ " est fausse.

La propriété

$$x^{ab} = (x^a)^b$$

est valable que pour $\underline{\underline{x > 0}}$.

avec $a, b \in \mathbb{R}$ pas forcément entiers ($a \cdot b = \frac{1}{2}$ non entier)

ADC 8

$$\bullet \quad 2^x = \left(e^{\ln(2)} \right)^x = e^{x \ln(2)} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \quad (1+x)^{3x} = \left(e^{\ln(1+x)} \right)^{3x} = e^{3x \ln(1+x)}.$$

Cela est valable lorsque $1+x > 0$, c'est à dire pour $x \in]-1, +\infty[$.

ADC 9

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si } x^2 - 4x + 3 < 0. \end{cases}$$

Le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Donc $x^2 - 4x + 3$

a deux racines : $x_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	+

Donc

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \in]1, 3[. \end{cases}$$

ADC 10

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|x+1| \leq 4 \iff -4 \leq x+1 \leq 4$$

$$\iff -5 \leq x \leq 3$$

L'ensemble des solutions est $[-5, 3]$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|2x+3| \geq 6 \iff 2x+3 \geq 6 \quad \text{ou} \quad 2x+3 \leq -6$$

$$\iff 2x \geq 3 \quad \text{ou}$$

$$\iff x \geq \frac{3}{2} \quad \text{ou}$$

$$x \leq -\frac{9}{2}$$

L'ensemble des solutions est :

$$]-\infty, -\frac{9}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[.$$

AoC 11

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x + \frac{3}{4} < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4} \leq x < \frac{9}{4}.$$

l'ensemble des solutions est $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right]$