TD AN1 - Corrigé

ADC 1

$f : x \longmapsto 2x+5$ est une fonction affine de coefficient dominant $2>0$, donc elle est <u>strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</u>

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$2x+5=0 \iff 2x=-5 \iff x=-\frac{5}{2}$$

On a :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

ADC 2

$f : x \longmapsto 7-3x$ est une fonction affine de coefficient dominant $-3<0$, donc elle est <u>strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</u>

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$7-3x=0 \iff x=\frac{7}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

ADC3

$f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$ est une fonction polynomiale du second degré, de coefficient dominant $a = 2 > 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24 < 0$.

Donc $f(x)$ est du signe de $a > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0}$$

Puisque $a > 0$, f admet un minimum en $-\dfrac{-4}{2 \times 2} = 1$

qui vaut $f(1) = 2 - 4 + 5 = 3$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

ADC4

$f : x \mapsto 2 - 3x^2 - x$ est une fonction polynomiale du second degré de coefficient dominant $a = -3 < 0$. Son discriminant est $\Delta = 25 > 0$.

f admet deux racines : $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{25}}{-6} = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3}$

et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{25}}{-6} = \dfrac{6}{-6} = -1$

Il y a un maximum en $-\dfrac{-1}{2 \times (-3)} = -\dfrac{1}{6}$, qui vaut :

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - 3 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{3}{36} + \frac{1}{6}$$

$$= 2 - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{24 - 1 + 2}{12} = \frac{25}{12}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{6}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ADC 5

- $144 = 12^2$ donc $\sqrt{144} = 12$
- $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

ADC 6

$$A = \frac{e^{\ln(3)} + \exp(5)^2 - 3}{e^7 \times \exp(-2)}$$

$$= \frac{3 + (e^5)^2 - 3}{e^7 \times e^{-2}}$$

$$= \frac{e^{10}}{e^5}$$

$$= e^5$$

$$B = \ln\left((e+e^{-1})^2 - e \times \left(\exp(1) - \exp(-3)\right) - 2\right)$$

$$= \ln\left(e^2 + 2 \times e \times e^{-1} + e^{-2} - e\left(e^1 - e^{-3}\right) - 2\right)$$

$$= \ln\left(e^2 + 2e^0 + e^{-2} - \left(e^2 - e^{-2}\right) - 2\right)$$

$$= \ln\left(\cancel{e^2} + \cancel{2} + e^{-2} - \cancel{e^2} + e^{-2} - \cancel{2}\right)$$

$$= \ln\left(2e^{-2}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln(e^{-2})$$

$$= \ln(2) - 2$$

ADC 7

L'égalité « $(-1)^{\frac{2}{2}} = \left((-1)^2\right)^{1/2}$ » est fausse.

La propriété $x^{ab} = (x^a)^b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ pas forcément entiers (ici $b = \frac{1}{2}$ non entier)

n'est valable que pour $x > 0$.

ADC 8

- $2^x = \left(e^{\ln(2)}\right)^x = e^{x\ln(2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- $(1+x)^{3x} = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{3x} = e^{3x\ln(1+x)}$.

  Ceci est valable lorsque $1+x > 0$, c'est-à-dire pour $x \in \,]-1, +\infty[$.

ADC 9

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si } x^2 - 4x + 3 < 0. \end{cases}$$

Le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Donc $x^2 - 4x + 3$ a deux racines : $x_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc

$$|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in \,]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \in \,]1, 3[. \end{cases}$$

ADC 10

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|x+1| \leq 4 \iff -4 \leq x+1 \leq 4$$
$$\iff -5 \leq x \leq 3$$

L'ensemble des solutions est $[-5, 3]$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|2x+3| \geq 6 \iff 2x+3 \geq 6 \quad \text{ou} \quad 2x+3 \leq -6$$
$$\iff 2x \geq 3 \quad \text{ou} \quad 2x \leq -9$$
$$\iff x \geq \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x \leq -\frac{9}{2}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\left]-\infty, -\frac{9}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$

ADC 11

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq x + \frac{3}{4} < 3$$

$$\iff \frac{5}{4} \leq x < \frac{9}{4}.$$

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right[$