TD – AL4

Applications

Applications directes du cours

ADC 1 Déterminer l'ensemble des antécédents de 4 puis de -1 par la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$

ADC 2 Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y-z) \end{array}$$

ADC 3 Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$ de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$

ADC 4 En utilisant les ADC précédents : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

ADC 5

1. L'application $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_1(x) = x^2+1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. L'application $h_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h_2(x) = x^2+1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. L'application $h_3 : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$ définie par $h_3(x) = x^2+1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

ADC 6 Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$ est injective.

ADC 7 L'application $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\psi(n) = 3n+1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

ADC 8 Montrer que l'application $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$ est surjective. Est-elle injective ?

ADC 9 Montrer que l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x-y) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque.
Vérifier que $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercices

Exercice 1 Soient $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ et $g : x \mapsto -x$, définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$f - f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Étudier la fonction f. On dressera son tableau de variation.

3. f est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$? surjective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$? Quel est l'ensemble image de f ?

4. Montrer que la fonction $g\colon \begin{array}{ccc} [1,2] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sqrt{4x-x^2-3} \end{array}$ est une bijection et préciser son application réciproque.

Exercice 3

On considère l'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, 2y-6x) \end{array}$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,0)$.

2. Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\operatorname{Im}(f) = \big\{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\big\}$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)

Pour aller plus loin

Exercice 4 Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (mais g pas forcément).

4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective (mais f pas forcément).

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles et $f, g\colon E \to F$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.