TD AL 5 - Applications.

Corrigé des PAPL

Exercice 4

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

1) On suppose f et g injectives.

Soient $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$

donc $f(x) = f(x')$ car g est injective

donc $x = x'$ car f est injective

Donc $g \circ f$ est injective.

2) On suppose que f et g sont surjectives.

Soit $w \in G$.

Puisque g est surjective de F dans G, il existe

$v \in F$ tel que $g(v) = w$

Puisque f est surjective de E dans F (et $v \in F$),

il existe $x \in E$ tel que $f(x) = v$

On a alors

$$w = g(v) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Donc $g \circ f$ est surjective de E dans G.

3) On suppose que $g \circ f$ est injective.

* Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$

Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$

donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$

donc $x = x'$ car $g \circ f$ est injective.

* g n'est pas forcément injective.

Ex : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

pas injective.

$$g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$g \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sans que g soit injective.

4) Supposons que $g \circ f$ est surjective de E dans G.

- Soit $w \in G$.

Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que

$$g \circ f(u) = w$$

On a $\quad g(f(u)) = w$

Posant $v = f(u) \in F$, on a $g(v) = w$.

Donc g est surjective de F dans G.

+ Pas forcément f.

Ex : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$

pas surjective

$g \circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto (\sqrt{x})^2 = x$ $\qquad$ surjective

Exercice 5

$f : E \to F \quad , \qquad g : F \to E.$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "f \circ g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective, de E dans F.

\+ Montrons que f est bijective de E dans F.

→ Injectivité : soient $u, u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$

alors $f \circ g \,(f(u)) = f \circ g \,(f(u'))$

donc $f \circ g \circ f (u) = f \circ g \circ f \,(u')$

donc $u = u'$ car $f \circ g \circ f$ est injective

Ainsi f est injective.

→ Surjectivité : soit $v \in F$.

Par surjectivité de $f \circ g \circ f$, il existe $u \in E$ tel

que $v = f \circ g \circ f (u) = f\,(g \circ f(u))$

En posant $u' = g \circ f(u) \in E$ on a $v = f(u')$

donc f est surjective

→ Ainsi f est bijective de E dans F. Soit $f^{-1} : F \to E$

son application réciproque

* Notons $h = f \circ g \circ f$.

Alors $f^{-1} \circ h \circ f^{-1} = \underbrace{f^{-1} \circ f}_{id_E} \circ\, g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{id_F}$

$= id_E \circ g \circ id_F$

$= g$

Donc g est composée d'applications bijectives.

D'après le cours, elle est bijective.