TD ALS - Applications

Corrigé des Exercices

Exercice 1

<u>Remarque :</u> pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+e^x \geq 1 > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On a $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

donc on peut bien réaliser $f \circ g$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(f - f\circ g)(x) &= f(x) - f(g(x)) \\
&= \ln(1+e^x) - f(-x) \\
&= \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x}) \\
&= \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{e^x(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}\right) \\
&= \ln(e^x) \\
&= x \\
&= id_{\mathbb{R}}(x)
\end{aligned}
$$

donc $f - f\circ g = id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2

1) $x \mapsto 4x - x^2 - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ (polynomiale)

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Par composée, f est définie sur

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 - 3 \geq 0 \}$$

Étudions $4x - x^2 - 3$.

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0.$$

Les solutions de $4x - x^2 - 3 = 0$ sont $x_1 = \frac{-4-\sqrt{4}}{-2} = 3$

et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{4}}{-2} = 1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$4x-x^2-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{D_f = [1, 3]}$

2) $x \mapsto 4x - x^2 - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

Par composée, f est dérivable sur

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 - 3 > 0 \} =]1, 3[$$

Soit $x \in]1, 3[$.

$$f'(x) = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

$$= \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

Puisque $\sqrt{4x - x^2 - 3} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$

x	1		2		3
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(2) = 1$

$f(1) = 0$

$f(3) = 0$

3) * $f(1) = f(3)$ mais $1 \neq 3$ donc f n'est pas injective de $[1,3]$ dans $\mathbb{R}$.

* L'ensemble image de f est $f([1,3]) = [0,1]$

* $f([1,3]) \neq \mathbb{R}$ donc f n'est pas surjective de $[1,3]$ dans $\mathbb{R}$.

4) Soient $x \in [1,2]$ et $y \in [0,1]$.

$$g(x) = y \iff \sqrt{4x - x^2 - 3} = y$$

$$\iff 4x - x^2 - 3 = y^2 \quad \text{car} \quad y \geq 0$$

$$\iff -x^2 + 4x - (3+y^2) = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(3+y^2) = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) \geq 0$$

car $y \in [0,1]$ donc $0 \leq y^2 \leq 1$.

Les solutions de $-x^2 + 4x - (3+y^2) = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4(1-y^2)}}{-2} = 2 + \sqrt{1-y^2}$$

et $x_2 = 2 - \sqrt{1-y^2}$

Or on a ici $x \in [1,2]$.

→ si $y = 1$, $x_1 = x_2 = 2$ est la seule solution dans $[1,2]$

→ si $0 \leq y < 1$, $0 \leq y^2 < 1$

donc $0 < 1 - y^2 \leq 1$

donc $0 < \sqrt{1-y^2} \leq 1$ par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $2 < x_1 \leq 3$ et $1 \leq x_2 < 2$

Ainsi il y a une seule solution dans $[1,2]$: x_2

Pour tout $y \in [0,1]$, $g(x) = y$ a une unique solution $x = x_2 = 2 - \sqrt{1-y^2}$ dans $[1,2]$ donc g est bijective et

$$g^{-1} : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [1,2] \\ y & \longmapsto & 2 - \sqrt{1-y^2} \end{array}$$

Exercice 3

1) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$f(u) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} \quad L_2 = -2L_1$

$\iff 3x - y = 0$

$\iff y = 3x$

$\iff u = (x, 3x)$

Donc l'ensemble des antécédents de $(0,0)$ par f est :

$\{(x, 3x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

2) * Soit $v \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

tel que $f(u) = v$.

On a alors $v = f(u) = (3x - y,\ 2y - 6x)$

En prenant $a = 3x - y$ on a $-2a = -6x + 2y$

donc $v = (a, -2a)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \{(a, -2a),\ a \in \mathbb{R}\}$

* Soit $v \in \{(a, -2a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

On peut écrire $v = (a, -2a)$.

On veut montrer que $v \in \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire que v s'écrit $v = f(u)$ avec $u \in \mathbb{R}^2$. On cherche u.

Soit $u = (x, y)$.

$v = f(u) \iff \begin{cases} a = 3x - y \\ -2a = 2y - 6x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x - y = a \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$\iff y = 3x - a$

$\iff u = (x, 3x - a)$

Donc $v = f(u)$ avec $u = (x, 3x - a) \in \mathbb{R}^2$

Ainsi $v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\{(a, -2a),\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(f)$

* Par double inclusion : $\mathrm{Im}(f) = \{(a, -2a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

3) * $(0,0)$ a une infinité d'antécédents donc plus de 1.
Ainsi f n'est pas injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

* $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$ donc f n'est pas surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

* f n'est donc pas bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.