TD ALS - Applications
Corrigé des ADC

ADC 1

* f est rationnelle donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$.

car $x^2+1 \geq 1$ pour tout réel x.

* Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 4 \iff \frac{3x+4}{x^2+1} = 4$$
$$\iff 3x+4 = 4x^2+4$$
$$\iff 4x^2 - 3x = 0$$
$$\iff x(4x-3) = 0$$
$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x-3 = 0$$
$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{4}$$

L'ensemble des antécédents de 4 par f est $\{0, \frac{3}{4}\}$

* $$f(x) = -1 \iff \frac{3x+4}{x^2+1} = -1$$
$$\iff 3x+4 = -x^2-1$$
$$\iff x^2+3x+5 = 0$$

Le discriminant de x^2+3x+5 est : $\Delta = -11 < 0$

Donc $x^2+3x+5 = 0$ n'a pas de solution.

-1 n'a pas d'antécédent par f.

ADC2

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$g(u) = (1,2) \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -3y + 3z = -3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$\iff \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$

$\iff \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$\iff \begin{cases} y = z + 1 \\ x = -z \end{cases}$

$\iff u = (-z, z+1, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par g est

$$\{ (-z, z+1, z), \quad z \in \mathbb{R} \}$$

Rq : suivant les pivots choisis, on peut aussi obtenir :

$$\{ (x, -x+1, -x), \quad x \in \mathbb{R} \}$$

ou $$\{ (-y+1, y, y-1), \quad y \in \mathbb{R} \}$$

AD C3

* $f : x \longmapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est rationnelle et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \dfrac{3(x^2+1) - 2x(3x+4)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$$

Or $(x^2+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-3x^2 - 8x + 3$.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 64 + 36 = 100 > 0$

$-3x^2 - 8x + 3 = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{100}}{-6} = \dfrac{1}{3}$

et $x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{100}}{-6} = -3$

On a donc

x	$-\infty$		-3		$1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* Soit $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1} = \dfrac{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{3 + \frac{4}{x}}{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$

$\xrightarrow[\substack{x \to -\infty \\ \text{ou } x \to +\infty}]{} 0$ par quotient

$f(-3) = \dfrac{-5}{10} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{\frac{10}{9}} = \dfrac{9}{2}$.

* Le tableau de variation de f est donc :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0

Ainsi $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$

ADC4 D'après l'ADC1 :

→ 4 a deux antécédents par f donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

→ -1 n'a aucun antécédent par f donc f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On peut aussi citer l'ADC3 : $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$

→ f n'est donc pas bijective non plus.

ADC5

1) * $h_1(1) = 2 = h_1(-1)$ donc 2 a au moins deux antécédents par h_1 : h_1 n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

* $h_1(x) = 0 \iff x^2 = -1$ ce qui est impossible

donc 0 n'a pas d'antécédent par h_1 : h_1 n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

* h_1 n'est donc pas bijective.

2) * Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$.

$h_2(x) = h_2(x') \iff x^2 + 1 = (x')^2 + 1$

$\iff x^2 = (x')^2$

$\iff x = x'$ car $x \geq 0$ et $x' \geq 0$

Donc h_2 est injective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

* Avec le même exemple que pour h_1, h_2 n'est pas surjective, donc pas bijective, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$

3) Rq : on a bien $h_3(x) = x^2 + 1 \in [1, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

Soit $y \in [1, +\infty[$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$

$h_3(x) = y \iff x^2 + 1 = y \iff x^2 = y - 1 \iff x = \sqrt{y-1}$

car $x \geq 0$ et $y - 1 \geq 0$. Donc $h_3(x) = y$ a une unique solution $x \in \mathbb{R}_+$ pour tout $y \in [1, +\infty[$: h_3 est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

Elle est ainsi injective et surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$

ADC 6

Méthode 1

f est rationnelle donc bien dérivable sur $]1,+\infty[$ car $\forall x \in]1,+\infty[$, $x-1 \neq 0$.

Soit $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

Ainsi f est injective de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode 2

Soient $x, x' \in]1,+\infty[$.

$$f(x) = f(x') \iff \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x'+1}{x'-1}$$

$$\iff (2x+1)(x'-1) = (2x'+1)(x-1)$$

$$\iff \cancel{2xx'} - 2x + x' \cancel{-1} = \cancel{2xx'} - 2x' + x \cancel{-1}$$

$$\iff -3x = -3x'$$

$$\iff x = x'$$

Donc f est injective de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

AOC7

* Injectivité

Soient $n, n' \in \mathbb{N}$.

$$\varphi(n) = \varphi(n') \iff 3n+1 = 3n'+1$$
$$\iff 3n = 3n'$$
$$\iff n = n'$$

donc φ est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

* Surjectivité

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = 0 \iff 3n+1 = 0 \iff 3n = -1$$
$$\iff n = -\frac{1}{3}$$ impossible car $n \in \mathbb{N}$.

Donc $0 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par φ dans $\mathbb{N}$.

Ainsi φ n'est pas surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

* On en déduit que φ n'est pas bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

ADC 8

* Soit $v \in \mathbb{R}$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$h(u) = v \iff 2x + y = v$$
$$\iff y = v - 2x$$
$$\iff u = (x, v - 2x) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $v \in \mathbb{R}$, l'équation $h(u) = v$ a une infinité de solutions $u \in \mathbb{R}^2$, donc a au moins une solution.
Ainsi h est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

* Puisque $h(u) = v$ a toujours une infinité de solutions donc plus que une solution, h n'est pas injective.

ADC 9

Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(u) = v \iff \begin{cases} 2x - y = a \\ x - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a - 2b \\ x - y = b \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\iff \begin{cases} y = a - 2b \\ x = a - b \end{cases}$$

$$\iff u = (a - b, a - 2b).$$

Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(u) = v$ a une unique solution $u \in \mathbb{R}^2$ donc φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$v = (a, b) \longmapsto (a - b, a - 2b)$$

* Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(v) = \varphi(\underbrace{a-b}_{x}, \underbrace{a-2b}_{y}) = \left(2(a-b) - (a-2b), (a-b) - (a-2b)\right)$$
$$= (a, b)$$
$$= id_{\mathbb{R}^2}(v) \quad \text{donc} \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{R}^2}.$$