TD AL3 - Corrigé des DAPL

Exercice 8

Notons $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\}$

$B = \{(a+b,\ 2b,\ 2a - 3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On cherche $A \cap B$.

* Soit $u \in A \cap B$.

On a → $u \in A$, donc $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $2x + y - 2z = 2$

et → $u \in B$, donc $u = (a+b,\ 2b,\ 2a-3b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc

$$\begin{cases} x = a+b \\ y = 2b \\ z = 2a - 3b \end{cases}$$

et $2x + y - 2z = 2$ donc $2(a+b) + 2b - (2a - 3b) = 2$

donc $7b = 2$

donc $b = \frac{2}{7}$

Ceci donne $x = a + b = a + \frac{2}{7}$

$y = \frac{4}{7}$

$z = 2a - 3b = 2a - \frac{6}{7}$

Donc $u = \left(a + \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ 2a - \frac{6}{7}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi $u \in \left\{\left(a + \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ 2a - \frac{6}{7}\right), a \in \mathbb{R}\right\}$

Donc $A \cap B \subset \left\{\left(a + \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ 2a - \frac{6}{7}\right),\ a\ \mathbb{R}\right\}$

* Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $u \in \left\{ \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right), a \in \mathbb{R} \right\}$.

Alors u s'écrit $u = \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u \in A \cap B$, c'est-à-dire que $u \in A$ et que $u \in B$.

→ On a $u = (x, y, z)$ avec $\begin{cases} x = a + \frac{2}{7} \\ y = \frac{4}{7} \\ z = 2a - \frac{6}{7} \end{cases}$

et
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2\left(a + \frac{2}{7}\right) + \frac{4}{7} - \left(2a - \frac{6}{7}\right) \\ &= 2a + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - 2a + \frac{6}{7} \\ &= \frac{14}{7} = 2 \end{aligned}$$

Donc $u \in A$

→ On a aussi $u = (a + b, 2b, 2a - 3b)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b = \frac{2}{7} \in \mathbb{R}$

donc $u \in B$.

Ainsi, $u \in A \cap B$ et on a bien

$$\left\{ \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right), a \in \mathbb{R} \right\} \subset A \cap B.$$

Conclusion : Par double inclusion,

$$A \cap B = \left\{ \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right), a \in \mathbb{R} \right\}.$$