TD AL3 - Exercices

Exercice 1

* <u>Montrons $A \subset B$</u>

Soit $u = (a-b \quad , b \quad , -2a+3b) \in A$

$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $\begin{cases} x = a-b \\ y = b \\ z = -2a+3b \end{cases}$

$2x - y + z = 2(a-b) - b + (-2a+3b)$

$= 0$

Donc $u \in B$. Ainsi $A \subset B$

* <u>Montrons $B \subset A$</u>

Soit $u \in B$. $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $2x - y + z = 0$. (*)

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$u = (a-b \quad , b \quad , -2a+3b)$.

$u = (a-b \quad , b \quad , -2a+3b) \iff \begin{cases} x = a-b \\ y = b \\ z = -2a+3b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = a-y \\ b = y \\ z = -2a+3y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = x+y \\ b = y \\ z = -2x+y \end{cases}$ ← vrai d'après (*)

Avec $a = x+y$ et $b = y$, on a

bien $u = (a-b \quad , b \quad , -2a+3b)$. Donc $u \in A$

Ainsi $B \subset A$.

* <u>Conclusion</u> : Par double inclusion, $A = B$.

Exercice 2

forme paramétrique

Soient $A = \{(1+a-b,\ 4+5a-3b,\ 1+a),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 1\}$

équation

A et B sont des parties de $\mathbb{R}^3$.

* <u>Montrons que $A \subset B$</u>

Soit $u \in A$. On a $u = (1+a-b,\ 4+5a-3b,\ 1+a)$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $\begin{cases} x = 1+a-b \\ y = 4+5a-3b \\ z = 1+a \end{cases}$

et $3x - y + 2z = 3(1+a-b) - (4+5a-3b) + 2(1+a)$

$= 3 + \cancel{3a} - \cancel{3b} - 4 - \cancel{5a} + \cancel{3b} + 2 + \cancel{2a}$

$= 1$

Donc $u \in B$

Ainsi <u>$A \subset B$</u>

* <u>Montrons que $B \subset A$</u>

Soit $u \in B$. On a $u = (x,y,z)$ avec $3x - y + 2z = 1$.

On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (1+a-b,\ 4+5a-3b,\ 1+a)$.

$(1+a-b,\ 4+5a-3b,\ 1+a) = u \iff \begin{cases} 1+a-b = x \\ 4+5a-3b = y \\ 1+a = z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a-b = x-1 \\ 5a-3b = y-4 \\ a = z-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -b = x-z \\ -3b = y-5z+1 \\ a = z-1 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = -x+z \\ -3(-x+z) = y - 5z + 1 \\ a = z-1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = -x+z \\ 3x - y + 2z = 1 \\ a = z-1 \end{cases} \leftarrow \text{vrai car } u \in B$$

Ainsi $\begin{cases} a = z-1 \\ b = -x+z \end{cases}$ conviennent. On a bien $u \in A$.

Donc $\underline{B \subset A}$

Conclusion : Par double-inclusion, $\underline{A = B}$

Exercice 3

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in E \cap F &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2z \\ 3x + 5z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2z \\ x = -\frac{5}{3}z \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3}z \\ x = -\frac{5}{3}z \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow u = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \\
&\Longleftrightarrow u \in \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \quad z \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

$$E \cap F = \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \quad z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 4

On procède par double-inclusion.

* Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Ceci signifie que $x \in A \cap B$ ou $x \in C$.

→ si $x \in A \cap B$: $x \in A$ et $x \in B$.

Or $A \subset A \cup C$ donc $x \in A \cup C$

et $B \subset B \cup C$ donc $x \in B \cup C$

Ainsi $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

→ si $x \in C$; $C \subset A \cup C$ donc $x \in A \cup C$

et $C \subset B \cup C$ donc $x \in B \cup C$.

Ainsi $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Dans tous les cas, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ donc

$$\boxed{(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)}$$

* Soit $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Ceci signifie que $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$.

c'est-à-dire ($x \in A$ ou $x \in C$) et ($x \in B$ ou $x \in C$).

Montrons que $x \in (A \cap B) \cup C$, c'est-à-dire que $x \in A \cap B$ ou $x \in C$.

→ si $x \in C$, on a bien $x \in (A \cap B) \cup C$.

→ si $x \notin C$, puisque ($x \in A$ ou $x \in C$) on en déduit que $x \in A$. De même, on a ($x \in B$ ou $x \in C$) donc $x \in B$. Ainsi $x \in A \cap B$, donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

Au final, on a bien dans tous les cas,

$x \in (A \cap B) \cup C$.

Donc

$$\boxed{(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C}$$

* Par double-inclusion,

$$\boxed{(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)}$$