TD AL2 : Corrigé du PAPL

Exercice 7

$$M = N + 3 I_4 \qquad \text{avec} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (3 I_4)^k = 3^k I_4$

* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  et $N^4 = O_4$ donc $\forall k \geq 4, \ N^k = O_4$.

* $N (3 I_4) = 3 N = (3 I_4) N$ donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3 I_4)^{n-k}$$

$$= \underbrace{3^n I_4}_{k=0} + \underbrace{n\, 3^{n-1} N}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} N^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} 3^{n-3} N^3}_{k=3}$$

$$+ \underbrace{O_4}_{\substack{\text{reste} \\ k \geq 4}}$$

formule valable $\forall n \in \mathbb{N}$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 2n\, 3^{n-1} & n(n-1)\, 3^{n-2} & 2n(n-1)(n-2)\, 3^{n-4} \\ 0 & 3^n & n\, 3^{n-1} & n(n-1)\, 3^{n-2} \\ 0 & 0 & 3^n & 2n\, 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = J + I$$

avec $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I = I_n$

* On montre par récurrence que $\forall k \geq 1$, $J^k = n^{k-1} J$

et on a $J^0 = I$

* $JI = J = IJ$ donc d'après la formule du binôme

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k I^{p-k}$$

$$= \underbrace{I}_{k=0} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} J I$$

$$= I + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k 1^{n-k} - \underbrace{1}_{\text{terme } k=0} \right) J$$

$$= I + \frac{1}{n} \left((n+1)^p - 1 \right) J$$

Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$A_x X = B \iff \begin{cases} (1-x)a - c = \alpha \\ a + (2-x)b + c = \beta \\ 2a + 2b + (3-x)c = \gamma \end{cases}$$

Les inconnues sont a, b et c.

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (3-x)L_1}}{\iff} \begin{cases} (1-x)a - c = \alpha \\ (2-x)a + \boxed{(2-x)b} = \alpha + \beta \\ (x^2-4x+5)a + 2b = \gamma + (3-x)\alpha \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } 2-x \neq 0 \quad (\text{i.e. } x \neq 2)}$

$$A_x X = B \underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2-x}}{\iff} \begin{cases} (1-x)a - c = \alpha \\ a + b = \dfrac{\alpha+\beta}{2-x} \\ (x^2-4x+5)a + 2b = \gamma + (3-x)\alpha \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} (1-x)a - c = \alpha \\ a + b = \dfrac{\alpha+\beta}{2-x} \\ \boxed{(x^2-4x+3)a} = \underbrace{\gamma + (3-x)\alpha - 2\dfrac{\alpha+\beta}{2-x}}_{\text{Notons cela } \delta} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si, de plus, } x^2-4x+3 \neq 0 \quad (\text{i.e. } x \neq 1 \text{ et } x \neq 3)}$

$$A_x X = B \iff \begin{cases} (1-x)a - c = \alpha \\ a + b = \dfrac{\alpha+\beta}{2-x} \\ a = \dfrac{\delta}{x^2-4x+3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = \dfrac{(1-x)\delta}{x^2-4x+3} - \alpha \\ b = \dfrac{\alpha+\beta}{2-x} - \dfrac{\delta}{x^2-4x+3} \\ a = \dfrac{\delta}{x^2-4x+3} \end{cases}$$

Il y a une <u>unique solution</u>, donc <u>A_x est inversible</u>

Il reste les cas $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ à traiter.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_1 = C_2 \text{ donc } \underline{A_1 \text{ n'est pas inversible}}$$

<u>Autre méthode :</u> $A_1 X = B \iff \begin{cases} -c = \alpha \\ a + b + c = \beta \\ 2a + 2b + c = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} c = -\alpha \\ a + b = \alpha + \beta \\ 2a + 2b = \alpha + \gamma \end{cases}$

d'où on voit que si $2(\alpha + \beta) \neq \alpha + \gamma$ il n'y a pas de solution (par exemple avec $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $2 \neq 1$)

Donc $\underline{A_1 \text{ n'est pas inversible}}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = -L_1 \text{ donc } \underline{A_2 \text{ n'est pas inversible.}}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 X = B \iff \begin{cases} -2a - c = \alpha \\ a - b + c = \beta \\ 2a + 2b = \gamma \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -2a - c = \alpha \\ -a - b = \alpha + \beta \\ 2a + 2b = \gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2a - c = \alpha \\ a + b = -\alpha - \beta \\ a + b = \frac{1}{2}\gamma \end{cases}$$

si $-\alpha - \beta \neq \frac{1}{2}\gamma$ il n'y a pas de solution

(par exemple si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Donc $\underline{A_3 \text{ n'est pas inversible.}}$

<u>Conclusion</u> : A_x est inversible si et seulement si $x \in \{1, 2, 3\}$.