TD ALS : Corrigé du PAPL

Exercice 5

$$M = N + 3I_4 \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (3I_4)^k = 3^k I_4$

* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  et $N^4 = 0_4$ donc $\forall k \geq 4, N^k = 0_4$.

* $N(3I_4) = 3N = (3I_4)N$ donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3I_4)^{n-k}$$

$$= \underbrace{3^n I_4}_{k=0} + \underbrace{n\, 3^{n-1} N}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} N^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} 3^{n-3} N^3}_{k=3}$$

$$+ \underbrace{0_4}_{\substack{\text{reste}\\ k \geq 4}}$$

formule valable $\forall n \in \mathbb{N}$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 2n\,3^{n-1} & n(n-1)\,3^{n-2} & 2n(n-1)(n-2)\,3^{n-4} \\ 0 & 3^n & n\,3^{n-1} & n(n-1)\,3^{n-2} \\ 0 & 0 & 3^n & 2n\,3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = J + I$$

avec $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I = I_n$

* On montre par récurrence que $\forall k \geq 1,\ J^k = n^{k-1} J$

et on a $J^0 = I$

* $JI = J = IJ$ donc d'après la formule du binôme

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k I^{p-k}$$

$$= \underbrace{I}_{k=0} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} J I$$

$$= I + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k 1^{n-k} - \underbrace{1}_{\text{terme } k=0} \right) J$$

$$= I + \frac{1}{n}\left((n+1)^p - 1\right) J$$

Exercice 7

A_x inversible $\iff$ on peut passer de A_x à I_3 par opérations élémentaires sur les lignes.

(dans la méthode à $(A_x \mid I_3)$, on n'écrira pas la partie de droite qui permet de calculer $(A_x)^{-1}$ car cela n'est pas demandé).

$$A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 2 & 2 & 3-x \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - (1-x)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -(1-x)(2-x) & x-2 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 2x-2 & 1-x \end{pmatrix} \neq$$

si $2x-2 \neq 0$ (i.e $x \neq 1$)

$$A_x \underset{L_3 \leftarrow L_3 \times \frac{1}{2(x-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -(1-x)(2-x) & x-2 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (1-x)(2-x) L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (2-x) L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(x-2)(3-x)}{2} \\ 1 & 0 & \frac{4-x}{2} \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

si de plus $\frac{(x-2)(x-3)}{2} \neq 0$ (i.e $x \neq 2$ et $x \neq 3$)

$$A_x \underset{L_1 \leftarrow L_1 \times \frac{2}{(x-2)(x-3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{(4-x)}{2} \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ en échangeant les lignes.

Donc si $x \notin \{1, 2, 3\}$, A_x est inversible.

si $x = 2$ ou $x = 3$ on reprend à $(*)$

$$A_x \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{4-x}{2} \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$ il y a une ligne nulle donc A_x n'est pas inversible

si $x = 1$ on reprend à $(*)$

$$A_x \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & x-2 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ donc A_x n'est pas non plus inversible