AL 2 : Corrigé des exercices

Exercice 1

1) Soit $M = {}^tA A$.

${}^tM = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = M$ donc M est symétrique

2) On suppose que ${}^tX = X$.

Soit $M = {}^tAX + XA$.

$${}^tM = {}^tX\,{}^t({}^tA) + {}^tA\,{}^tX = XA + {}^tAX = M$$

donc M est symétrique.

3) On suppose ${}^tX = -X$ et $M = {}^tAX + XA$.

${}^tM = {}^tXA + {}^tAX = -XA + {}^tAX = -({}^tAX + XA) = -M$

Donc M est anti-symétrique.

Exercice 2

$A^0 = I_3$

$A^1 = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

et pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} A^n &= A^3 \times A^{n-3} \quad (\text{avec } n-3 \in \mathbb{N}) \\ &= 0_3 \times A^{n-3} \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

Exercice 3

1) Initialisation : $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & b_0 \\ 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$.

$$A^{n+1} = A^n . A$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+a_n & a_n + b_n \\ 0 & 1 & 1+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc en posant $\begin{cases} a_{n+1} = 1+a_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$, on a bien

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$

telles que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et on a : $\begin{cases} a_0 = b_0 = 0 \\ a_{n+1} = 1+a_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$

2) (a_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $a_0 = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + n \times 1$

donc $\boxed{a_n = n}$.

3) $$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n - b_0 \quad \text{par télescopage}$$
$$= b_n$$

Or $b_{k+1} - b_k = (a_k + b_k) - b_k = a_k = k$

Donc $$\boxed{b_n = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}}$$

4) Ainsi, $$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 4

1) a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^3 - A^2 + 2A + 11 I_3 = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 2 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$
$$+ 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

1b) On a :

$$A^3 - A^2 + 2A = -11 I_3$$

donc $$-\frac{1}{11} A^3 + \frac{1}{11} A^2 - \frac{2}{11} A = I_3$$

donc $$A\left(-\frac{1}{11} A^2 + \frac{1}{11} A - \frac{2}{11} I_3\right) = I_3$$

⚠

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{11} A^2 + \frac{1}{11} A - \frac{2}{11} I_3$

<u>Calcul</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\left(-A^2 + A - 2I_3\right)$$

$$= \frac{1}{11}\left(-\begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : avec la méthode du pivot.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = B \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - y + z = b \\ -2x + y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a & \\ -3y - 2z = -a + b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 5y + 7z = 2a + c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a & \\ y + \frac{2}{3} z = +\frac{1}{3} a - \frac{1}{3} b & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \\ 5y + 7z = 2a + c & \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + \frac{5}{3} z = \frac{1}{3} a + \frac{2}{3} b & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ y + \frac{2}{3} z = \frac{1}{3} a - \frac{1}{3} b & \\ \frac{11}{3} z = \frac{1}{3} a + \frac{5}{3} b + c & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{2}{11} a - \frac{1}{11} b - \frac{5}{11} c \\ y = \frac{3}{11} a - \frac{7}{11} b - \frac{2}{11} c \\ z = \frac{1}{11} a + \frac{5}{11} b + \frac{3}{11} c \end{cases}$

Donc pour tout $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution. Ainsi A est inversible.

De plus la solution est

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11}a - \frac{1}{11}b - \frac{5}{11}c \\ \frac{3}{11}a - \frac{7}{11}b - \frac{2}{11}c \\ \frac{1}{11}a + \frac{5}{11}b + \frac{3}{11}c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

2 a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4(A + I_4)$$

2b) On a

$$A^2 + 2A I_4 + I_4^2 = 4A + 4I_4 \quad (\text{car } AI_4 = I_4 A)$$

donc $A^2 - 2A = 3I_4$

donc $\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A = I_4$

donc $A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4\right) = I_4$ et ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3) $$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

$= 6A$

Supposons, par l'absurde, que A est inversible.

$A^2 = 6A$ donc $A^2A^{-1} = 6AA^{-1}$ donc $A = 6I_4$.

Absurde. Donc A n'est pas inversible.

Exercice 5

1) Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$PX = B \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\iff} \begin{cases} y = a + c \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = a + c \\ z = -a + b - c \\ x = -a + b - 2c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -a + b - 2c \\ a + c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B$$

$\forall B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX = B$ admet une unique solution

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vérification : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

2) $D = P^{-1} A P = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc D est bien diagonale.

3) Puisque D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

<u>Initialisation</u> : $A^0 = I_3$ et $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1}$

$$= P P^{-1} = I_3$$

Donc $A^0 = P D^0 P^{-1}$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P D^n P^{-1}$.

$$P D^{n+1} P^{-1} = P D^n D P^{-1}$$

$$= \underbrace{P D^n P^{-1}}_{= A^n} A P P^{-1}$$

$$= A^n . A . I_3$$

$$= A^{n+1}$$

On peut aussi remarquer que $D = P^{-1} A P$

donc $P D P^{-1} = P P^{-1} A P P^{-1} = A$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$.

Il reste à faire le calcul.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ (-2)^n & 0 & (-2)^n \\ -4^n & 4^n & -4^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + (-2)^n + 4^n & 1 - 4^n & -2 + (-2)^n + 4^n \\ (-2)^n - 4^n & 4^n & (-2)^n - 4^n \\ 1 - 4^n & -1 + 4^n & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1) $N^0 = I_3$

$N^1 = N$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

et pour tout $n \geq 3$, $N^n = N^3 . N^{n-3}$ avec $n-3 \in \mathbb{N}$

$$= 0_3 . N^{n-3}$$
$$= 0_3$$

2) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + 2I_3$.

On a $N(2I_3) = 2NI_3 = 2N$

et $(2I_3)N = 2I_3N = 2N$

donc $N(2I_3) = (2I_3)N$.

D'après la formule du binôme,

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k}$$

or $(2I_3)^{n-k} = 2^{n-k} I_3^{n-k} = 2^{n-k} I_3$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $(I_3)^n = I_3$.

et $N^k = 0_3$ pour $k \geq 3$.

On a donc :

* Cette égalité est bien valable $\forall n \in \mathbb{N}$ si on n'écrit pas de factorielles

$$M^n \overset{*}{=} \binom{n}{0} N^0 2^n I_3 + \underbrace{\binom{n}{1} N^1 2^{n-1} I_3}_{\text{terme nul si } n<1} + \underbrace{\binom{n}{2} N^2 2^{n-2} I_3}_{\text{terme nul si } n<2} + 0_3$$

$$= 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

$$= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) 2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$