AL2 : Corrigé des ADC

ADC 1

$$3A - B = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2I_2 + A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3(A - 2B) = 3A - 6B = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

ADC 2

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$BX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$CY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$DY = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ADC 3

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et $\quad {}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

ADC 4

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Conjecture : $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

En $n = 1$: $M^1 = M = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

alors $M^{n+1} = M^n M$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Rq : $M^0 = I_3$

ADC 5

* $\det(A) = 6 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

* $\det(B) = 16 - 21 = -5 \neq 0$ donc B est inversible

et $$B^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 & 3/5 \\ 7/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

* $\det(C) = 15 + 27 = 42 \neq 0$ donc C est inversible

et $$C^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/42 & 1/14 \\ -3/14 & 1/14 \end{pmatrix}$$

* $\det(D) = 0$ donc D n'est pas inversible.

* E est diagonale et un de ses coefficients diagonaux est nul donc E n'est pas inversible

* F est diagonale et ses coefficients diagonaux sont non nuls donc F est inversible et

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

* G est triangulaire (supérieure) et un de ses coefficients diagonaux est nul donc G n'est pas inversible

* H est triangulaire (inférieure) et un de ses coefficients diagonaux est nul donc H n'est pas inversible.

ADC 6

a) Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = B \iff \begin{cases} -2x = a \\ x + y = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} + b \\ z = -\frac{a}{2} - 2b + c \end{cases}$$

$\forall B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = B$ a une unique solution

donc A est <u>inversible</u>.

De plus, $AX = B \iff X = \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 + b \\ -a/2 - 2b + c \end{pmatrix}$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} B$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = B \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = b \\ x + 2z = c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = -a + b \\ x + 2z = c \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\iff} \begin{cases} y = 2a - b \\ x + z = -a + b \\ z = a - b + c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\iff} \begin{cases} y = 2a - b \\ x = -2a + 2b - c \\ z = a - b + c \end{cases}$$

$\forall B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = B$ admet une unique solution donc A est inversible. La solution étant

$$X = \begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ 2a - b \\ a - b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} B$$

On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ADC7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (ADC6) donc

Méthode 1 :

$S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \times 1 + 2 \times 3 - 1 \times (-1) \\ y = 2 \times 1 - 3 \\ z = 1 - 3 + (-1) \end{cases}$

i.e. $a = 1$
$b = 3$
$c = -1$

$\iff \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$

Méthode 2

$S \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$