TD AL1 - Systèmes

Corrigé des exercices

Exercice 1

1) $x + 2y + 3z = 5 \iff x = -2y - 3z + 5$

$\iff (x, y, z) = (-2y - 3z + 5, y, z)$

L'ensemble des solutions est $\{(-2y - 3z + 5, y, z) \text{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

Autres réponses possibles : $\left(x, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}z, z\right)$

$\left(x, y, \frac{5}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x\right)$

2) $\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2y - 2z = -2 \\ 2y = -1 \\ -2z + 2t = 1 \end{cases}$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$

$\iff \begin{cases} x + z - t = 1/2 \\ -2z = -1 \\ y = -1/2 \\ -2z + 2t = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 1 \\ z = 1/2 \\ y = -1/2 \\ t = 1 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est :

$\left\{\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

Exercice 2

1) $\begin{cases} 7x + 3y = 3 \\ -3x - y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 24 \\ -3x - y = 7 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$

$\iff \begin{cases} x = -12 \\ y = 29 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\{(-12, 29)\}$ (1 solution)

2) $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 7y = 4 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\iff \begin{cases} x = -1 + 3 \times \frac{4}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\{(\frac{5}{7}, \frac{4}{7})\}$. (1 solution)

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$

L_1 et L_2 sont incompatibles donc il n'y a pas de solution.

ou

$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

L_2 est toujours fausse donc il n'y a pas de solution

4) $\begin{cases} 4x - 8y = 4 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ $L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$

$\iff x - 2y = 1$ on a supprimé $L_2 = L_1$

$\iff x = 1 + 2y$

$\iff (x, y) = (1 + 2y, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ quelconque.

L'ensemble des solutions est $\{(1+2y, y), y \in \mathbb{R}\}$

(infinité de solutions)

Autre réponse possible : $\left(x, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

Exercice 3

1) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + z = 2 \\ 5x - 3y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + z = 2 \\ 4x - 4y = -1 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$\iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x + z = 2 \\ -8x = -1 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

$\iff \begin{cases} y = \frac{3}{8} \\ z = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ -3x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 3y - 3z = -1 \\ -4y + 10z = 4 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - z = -\frac{1}{3} \\ -4y + 10z = 4 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$

$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y - z = -\frac{1}{3} \\ 6z = \frac{8}{3} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/9 \\ z = 4/9 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right) \right\}$

3) $$(S) : \begin{cases} 2x + 5y + 3z + t = 0 \\ -x + 2y + z - t = 0 \\ 7x + 4y + 3z + 5t = 0 \\ x + 7y + 4z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9y + 5z - t = 0 \\ -x + 2y + z - t = 0 \\ 18y + 10z - 2t = 0 \\ 9y + 5z - t = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

On remarque ici que $L_4 = L_1$ et $L_3 = 2L_1$

On peut donc supprimer L_4 et L_3.

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 9y + 5z - t = 0 \\ -x + 2y + z - t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9y + 5z - t = 0 \\ -x - 7y - 4z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = 9y + 5z \\ x = -7y - 4z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y, z, t) = (-7y - 4z, y, z, 9y + 5z)$$

avec $y, z \in \mathbb{R}$ quelconques

L'ensemble des solutions est

$$\{ (-7y - 4z, y, z, 9y + 5z), \ y, z \in \mathbb{R} \}$$

Autres réponses possibles :

$$\left(x, y, -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}y, -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}y \right)$$

$$\left(x, -\frac{1}{7}x - \frac{4}{7}z, z, -\frac{9}{7}x - \frac{1}{7}z \right)$$

$$(x, 4t + 5x, -9x - 7t, t)$$

$$\left(\frac{1}{5}y - \frac{4}{5}t, y, -\frac{9}{5}y + \frac{1}{5}t, t \right)$$

$$\left(-\frac{1}{9}z - \frac{7}{9}t, \frac{1}{9}t - \frac{5}{9}z, z, t \right)$$

L1) On écrit un système avec 1 équation par ligne.

Il y a ici 3 équations (car 3 signes =)

$$x+y=y+z=z+t=t+x \iff \begin{cases} x+y=y+z \\ y+z=z+t \\ z+t=t+x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad -z \quad = 0 \\ y \quad -t = 0 \\ -x + z \quad = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad -z \quad = 0 \\ y \quad -t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z, t) = (z, t, z, t)$$

avec $z, t \in \mathbb{R}$ quelconques

L'ensemble des solutions est

$$\{ (z, t, z, t) \text{ avec } z, t \in \mathbb{R} \}$$

Autres réponses possibles :

(x, y, x, y)

(x, t, x, t)

(z, y, z, y)

Exercice 4

1) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 7y - 8z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 7y - 8z = \lambda - 8 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, $\quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

<u>Si $\lambda - 8 \neq 1$</u>, L_1 et L_3 sont incompatibles, il n'y a pas de solution.

<u>Si $\lambda - 8 = 1$</u>, c'est-à-dire <u>$\lambda = 9$</u>, on a :

$$\begin{cases} 7y - 8z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \frac{8}{7} z = \frac{1}{7} \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - \frac{8}{7} z = \frac{1}{7} \\ x + \frac{5}{7} z = \frac{12}{7} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{8}{7} z + \frac{1}{7} \\ x = -\frac{5}{7} z + \frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = \left(-\frac{5}{7} z + \frac{12}{7}, \frac{8}{7} z + \frac{1}{7}, z\right)$$

avec z quelconque.

2) $\begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ (3-\lambda) y = 0 \end{cases} \quad (S)$

- <u>Si $3 - \lambda \neq 0$</u>, alors on a :

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ (3-\lambda) y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- <u>si de plus $\lambda \neq 0$</u>

$$(S) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Il reste deux cas non traités : $\lambda = 0$ et $\lambda = 3$.

* Si $\lambda = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff y = 0 \iff (x,y) = (x,0) \text{ avec } x \text{ quelconque.}$$

* Si $\lambda = 3$

$$(S) \iff \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = -\frac{2}{3}y$$

$$\iff (x,y) = \left(-\frac{2}{3}y , y\right) \quad \text{avec } y \text{ quelconque.}$$

3) $(S) \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda^2) y = 1-\lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2$

* Si $1-\lambda^2 \neq 0$, ie $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$, L_1 donne y :

$$(S) \iff \begin{cases} y = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^2} \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{1+\lambda} \\ x = \frac{1}{1+\lambda} \end{cases} \quad \text{car } 1-\lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda) \quad \text{(après simplification)}$$

* Si $\lambda = 1$

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff x = 1 - y$$

$$\iff (x,y) = (1-y , y) \quad \text{avec } y \text{ quelconque.}$$

* Si $\lambda = -1$

$$(S) \iff \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$ impossible, pas de solution.

4) (S) : $\begin{cases} y + z = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ x + y = \lambda z \end{cases}$ $\iff \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (1-\lambda^2)y + (1+\lambda)z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ (1+\lambda)y - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

* Si $1+\lambda \neq 0$ (ie $\lambda \neq -1$), on peut simplifier L_3

$(S) \iff \begin{cases} (1-\lambda^2)y + (1+\lambda)z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$\overset{(*)}{\iff} \begin{cases} (-\lambda^2+\lambda+2)z = 0 \\ x + (1-\lambda)z = 0 \\ y = z \end{cases}$

La valeur de z dépend de $-\lambda^2+\lambda+2$.

$-\lambda^2+\lambda+2 = 0$
$\Delta = 1 + 8 = 9$, $\lambda_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$, $\lambda_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$

Si de plus $-\lambda^2+\lambda+2 \neq 0$ (ie $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq -1$)

$(S) \overset{(*)}{\iff} \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

* Si $\lambda = -1$

$(S) \iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ $\iff x = -y-z$

$\iff (x,y,z) = (-y-z, y, z)$ avec $(y,z) \in \mathbb{R}^2$.

* Si $\lambda = 2$

$(S) \overset{(*)}{\iff} \begin{cases} 0 = 0 \\ x - z = 0 \\ y = z \end{cases}$ $\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

$\iff (x,y,z) = (z, z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.