TD – AL8

DIMENSION

Applications directes du cours

ADC 1 Dans chaque cas, montrer que F est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension :

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+4z=0\right\}$;
2. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=z+t=0\right\}$;
3. $F = \left\{(3x-5y, 2x, x+y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

ADC 2 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\right\}$.

1. Déterminer la dimension de E
2. Montrer que $E = \text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$.

ADC 3 Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ADC 4 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$. Déterminer $\text{rg}(e_1,e_2,e_3)$.

ADC 5 Soit f l'application définie par

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+2z, x+t) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
3. En déduire le rang de f puis une base de $\text{Im}(f)$.

ADC 6 On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x+2z).$$

1. Montrer que g est injective.
2. En déduire que g est bijective à l'aide du théorème du rang.

Exercices

Exercice 1 Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x-2y+z=0\right\}$ et $G = \text{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension de F et de G.
3. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

Exercice 2 On considère $h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x-y+z \end{array}$.

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Justifier que h est surjective.
3. En déduire $\dim(\text{Ker}(h))$.

Exercice 3 On considère l'application linéaire $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{3}(x-y, 2y-2x, 2x+y+3z) \end{array}$

1. On note $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-2,0)$ et $u_3 = (0,0,1)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $p(u_1)$, $p(u_2)$ et $p(u_3)$. En déduire le rang de p.
3. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(p))$ *puis* une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
4. En utilisant (u_1, u_2, u_3), montrer que $p^2 = p$.