TD – AL8

EXERCICES

Exercice 1 Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in F \Leftrightarrow x = 2y - z \Leftrightarrow u = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On trouve $\dim(F) = 2 = \dim(G)$.

3. **Première méthode :** avec des équations cartésiennes pour G.
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note ici $v_1 = (0,1,1)$ et $v_2 = (-1,1,-1)$.

$$av_1 + bv_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} -b = x \\ a + b = y \\ a - b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -x \\ a = x + y \\ a = -x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -x \\ a = x + y \\ 0 = -2x - y + z \end{cases}$$

Si $-2x - y + z = 0$, alors l'équation $av_1 + bv_2 = u$ admet au moins une solution donc $u \in G$.
Sinon, l'équation n'a pas de solution et $u \notin G$.
On a donc :

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x - y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + \boxed{z} = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + \boxed{z} = 0 \\ 3x - \boxed{y} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{z} = 5x \\ \boxed{y} = 3x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = x\underbrace{(1,3,5)}_{u_0} \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(u_0) \end{aligned}$$

Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}(\ u_0\ )$. Or $u_0 \neq 0$ donc la famille (u_0) est libre et génératrice de $F \cap G$: c'est une base de $F \cap G$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

Deuxième méthode : par double inclusion. La difficulté ici est que l'on ne connaît pas la réponse. On cherche un espace vectoriel H tel que $F \cap G = H$.

- Soit $u = (x,y,z) \in F \cap G$. On a donc $x - 2y + z = 0$ (car $u \in F$) et il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$u = av_1 + bv_2 = (-b, a + b, a - b) \quad (\text{car } u \in G).$$
On a alors : $-b - 2(a + b) + (a - b) = 0$ donc $-a - 4b = 0$ donc $a = -4b$. Ceci donne
$$u = (-b, -3b, -5b) = -b\underbrace{(1,3,5)}_{u_0}$$
donc $u \in \mathrm{Vect}(u_0)$. Ainsi, $\boxed{F \cap G \subset \mathrm{Vect}(u_0)}$.
(Ici, on espère que $H = \mathrm{Vect}(u_0)$ convient. Il faut encore montrer l'inclusion réciproque).

- Montrons maintenant que $\mathrm{Vect}(u_0) \subset F \cap G$.
  $u_0 \in F$ car $1 - 2 \times 3 + 5 = 0$.
  $u_0 \in G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ car avec $b = -1$ et $a = 4$ (ici, on s'inspire du calcul précédent)
  $$av_1 + bv_2 = 4v_1 - v_2 = (1, 3, 5) = u_0.$$
  On peut aussi résoudre $av_1 + bv_2 = u_0$ si on ne devine pas les coefficients.
  On a donc $u_0 \in F \cap G$ et comme $F \cap G$ est un espace vectoriel, $\boxed{\mathrm{Vect}(u_0) \subset F \cap G}$.

Par double-inclusion : $\boxed{F \cap G = \mathrm{Vect}(u_0)}$. Or $u_0 \neq 0$ donc la famille (u_0) est libre et génératrice de $F \cap G$: c'est une base de $F \cap G$.

Exercice 2

1. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} h(au + bv) &= h(ax + bx', ay + by', az + bz') \\ &= (ax + bx') - (ay + by') + (az + bz') \\ &= a(x - y + z) + b(x' - y' + z') \\ &= ah(u) + bh(v) \end{aligned}$$
   Donc h est linéaire.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a = h(a, 0, 0)$. Donc tout $a \in \mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par h : l'application h est bien surjective.

   2e méthode : pour tout $a \in \mathbb{R}$,
   $$h(x, y, z) = a \Leftrightarrow x - y + z = a \Leftrightarrow x = y - z + a \Leftrightarrow (x, y, z) = (y - z + a, y, z)$$
   Cette équation a donc une infinité de solutions (y et z sont quelconques) donc elle a au moins une solution. Ainsi, h est surjective.
3. On a alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
   D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = \dim(R^3) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

Exercice 3

1. - $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$
   - $\mathrm{Card}(u_1, u_2, u_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
   - $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ -3b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$
     Donc (u_1, u_2, u_3) est libre.

   D'après le cours, (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. $p(u_1) = (0, 0, 0)$, $p(u_2) = (1, -2, 0) = u_2$ et $p(u_3) = (0, 0, 1) = u_3$.
   Puisque (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p(u_1), p(u_2), p(u_3))$. Or, $p(u_1) = (0, 0, 0)$ donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p(u_2), p(u_3)) = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$ et comme (u_1, u_2, u_3) est libre, (u_2, u_3) l'est aussi. Donc (u_2, u_3) est libre et génératrice de $\mathrm{Im}(p)$: c'est une base de $\mathrm{Im}(p)$. Ainsi, $\mathrm{rg}(p) = 2$.
3. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(p) = 3 - 2 = 1$.
   - $u_1 \in \mathrm{Ker}(p)$ car $p(u_1) = (0, 0, 0)$;
   - $\mathrm{Card}(u_1) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(p))$;
   - (u_1) est libre car elle contient un seul vecteur, qui est non nul.

   On en déduit que (u_1) est une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

4. (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, u s'écrit (de manière unique) $u = au_1 + bu_2 + cu_3$. Par linéarité de p^2 et de p :

$$\begin{aligned}
p^2(u) &= ap^2(u_1) + bp^2(u_2) + cp^2(u_3) \\
&= ap(p(u_1)) + bp(p(u_2)) + cp(p(u_3)) \\
&= ap(0,0,0) + bp(u_2) + cp(u_3) \qquad \text{car } p(u_1) = (0,0,0),\ p(u_2) = u_2,\ p(u_3) = u_3 \\
&= a(0,0,0) + bu_2 + cu_3 \\
&= bu_2 + cu_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
p(u) &= ap(u_1) + bp(u_2) + cp(u_3) \\
&= a(0,0,0) + bu_2 + cu_3 \\
&= bu_2 + cu_3 \\
&= p^2(u)
\end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$.