TD – AL8

ADC

ADC1

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+4z=0\} \subset \mathbb{R}^3$.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u\in F &\Leftrightarrow x+5y+4z=0 \\ &\Leftrightarrow x=-5y-4z \\ &\Leftrightarrow u = y\underbrace{(-5,1,0)}_{u_1}+z\underbrace{(-4,0,1)}_{u_2} \\ &\Leftrightarrow u\in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)\end{aligned}$$

   Donc $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$au_1+bu_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5a-4b=0 \\ a=0 \\ b=0\end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$

   Donc $\mathcal{B}_F=(u_1,u_2)$ est libre et génératrice de F : c'est une base de F.

$$\dim(F)=\mathrm{Card}(\mathcal{B}_F)=2.$$

2. $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=z+t=0\}\subset\mathbb{R}^4$.
   Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u\in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0\\ y+z=0 \\ z+t=0\end{cases} \qquad \text{(3 équations)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \\ t=y\end{cases} \\ &\Leftrightarrow u=y\underbrace{(-1,1,-1,1)}_{u_1} \\ &\Leftrightarrow u\in\mathrm{Vect}(u_1)\end{aligned}$$

   Donc $F=\mathrm{Vect}(u_1)$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus, $u_1\neq(0,0,0,0)$. Donc $\mathcal{B}_F=(u_1)$ est libre et génératrice de F : c'est une base de F.

$$\dim(F)=\mathrm{Card}(\mathcal{B}_F)=1.$$

3. $F=\{(3x-5y,2x,x+y),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\subset\mathbb{R}^3$.
   Ici, on voit que $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1=(3,2,1)$ et $u_2=(-5,0,1)$. donc (u_1,u_2) est génératrice de F. De plus

$$au_1+bu_2=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}3a-5b=0\\ 2a=0 \\ a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0$$

   Donc $\mathcal{B}=(u_1,u_2)$ est libre et génératrice de F : c'est une base de F.

$$\dim(F)=\mathrm{Card}(\mathcal{B})=2.$$

ADC2

1. $E \subset \mathbb{R}^4$. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x + \boxed{y} + z = 0 \\ \boxed{x} - 4t + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y} - z + 4t = 0 \\ \boxed{x} - 4t + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y} = z - 4t \\ \boxed{x} = -2z + 4t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow u = z \underbrace{(-2, 1, 1, 0)}_{u_1} + t \underbrace{(4, -4, 0, 1)}_{u_2}$$
$$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$$

Donc $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. De plus,

$$au_1 + bu_2 = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b = 0 \\ a - 4b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Donc (u_1, u_2) est libre et génératrice de E : c'est une base de E, donc $\dim(E) = 2$.

2. Notons $u_3 = (2, 1, -3, -1)$ et $u_4 = (2, -5, 3, 2)$ et $F = \mathrm{Vect}\big(u_3, u_4\big)$

   - $$au_3 + bu_4 = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ a - 5b = 0 \\ -3a + 3b = 0 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ -6b = 0 \\ 6b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

     Donc (u_3, u_4) est libre et génératrice de F : c'est une base de F, donc $\dim(F) = 2$.
     On a donc : $\boxed{\dim(E) = 2 = \dim(F)}$

   - Il suffit alors de montrer une inclusion. La plus simple est $F \subset E$.

     – $u_3 \in E$ car $\begin{cases} 2 + 1 + (-3) = 0 \\ 2 - 4(-1) + 2(-3) = 0 \end{cases}$

     – $u_4 \in E$ car $\begin{cases} 2 + (-5) + 3 = 0 \\ 2 - 4 \times 2 + 2 \times 3 = 0 \end{cases}$

     Puisque E est un espace vectoriel, on a alors $\mathrm{Vect}(u_3, u_4) \subset E$, donc $\boxed{F \subset E}$.

   Conclusion : $\boxed{F = E}$

ADC3

Notons $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 3)) = (u_1, u_2, u_3)$.

- $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$.
- $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + c = 0 \\ \boxed{b} + 2c = 0 \\ a + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + c = 0 \\ \boxed{b} + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

  donc $\mathcal{B}$ est libre.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : l'autre méthode (sans la dimension) donne ceci :

- $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$.
- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = u \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + c = x \\ \boxed{b} + 2c = y \\ a + 3c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + c = x \\ \boxed{b} + 2c = y \\ 2c = -x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z \\ \boxed{b} = x + y - z \\ \boxed{c} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

  Cette éuqation a donc une unique solution pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ADC4

Notons $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de F. Est-elle libre ? Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} b + \boxed{c} = 0 \\ -a - 2b - c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + \boxed{c} = 0 \\ -a - b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = -b \end{cases}$$

Avec $b = 1$ et $\begin{cases} c = -b = -1 \\ a = -b = -1 \end{cases}$, on a :

$$-e_1 + e_2 - e_3 = (0,0,0) \quad \text{donc} \quad e_2 = e_1 + e_3 \in \text{Vect}(e_1, e_3)$$

Rq : on peut aussi le voir directement.
Donc $F = \text{Vect}(e_1, e_3)$. De plus, avec $b = 0$

$$ae_1 + ce_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B} = (e_1, e_3)$ est libre et génératrice de F : c'est une base de F.

$$\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2.$$

Or $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = \dim(F)$ donc $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 2$.

ADC5

1. Soient $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(au + bv) &= f\big(\ ax + bx'\ ,\ ay + by'\ ,\ az + bz'\ ,\ at + bt'\ \big) \\ &= \big((ax + bx') - (ay + by') + 2(az + bz')\ ,\ (ax + bx') + (at + bt')\big) \\ &= a(x - y + 2z, x + t) + b(x' - y' + 2z', x' + t') \\ &= af(u) + bf(v) \end{aligned}$$

   Donc f est une application linéaire.

2. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2z \\ t = -x \end{cases} \Leftrightarrow u = x\underbrace{(1,1,0,-1)}_{u_1} + z\underbrace{(0,2,1,0)}_{u_2} \Leftrightarrow u \in \text{Vect}(u_1, u_2)$$

   Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_1, u_2)$. De plus

$$au_1 + bu_2 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 2b = 0 \\ b = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

   Donc la famille (u_1, u_2) est libre et génératrice de $\text{Ker}(f)$, c'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

3. De la question précédente, on déduit que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$. D'après le théorème du rang

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Ceci signifie que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Raisonnement 1 : $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Ainsi, la famille $((1,0),(0,1))$ (base canonique de $\mathbb{R}^2$) est une base de $\text{Im}(f)$.

Raisonnement 2 : Notons

$$\begin{aligned} v_1 &= f(1,0,0,0) = (1,1) \\ v_2 &= f(0,1,0,0) = (-1,0) \end{aligned}$$

- $v_1 \in \text{Im}(f)$ et $v_2 \in \text{Im}(f)$.
- $\text{Card}((v_1, v_2)) = 2 = \dim(\text{Im}(f))$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$av_1 + bv_2 = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Donc (v_1, v_2) est libre.

On en déduit que (v_1, v_2) est une base de $\text{Im}(f)$.

ADC6

1. Montrons que g est injective. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(g) &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 0 \\ -2\boxed{y} = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (0,0,0) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(g) = \{(0,0,0\}$. Ainsi g est injective.

2. D'après le théorème du rang, $\text{rg}(g) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(g)) = 3 - 0 = 3$ donc $\dim(\text{Im}(g)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R}^3$ donc $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3$. Ceci signifie que g est surjective et donc elle est bijective.