TD – PB4

Variables aléatoires discrètes

Applications directes du cours

ADC 1

1. Vérifier que la variable aléatoire suivante est bien définie :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{1}{\mathrm{e}\, k!}.$$

2. Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.

ADC 2 On considère une urne composée initialement d'une boule blanche et d'une boule rouge. On effectue une succession illimitée de tirages d'une boule dans cette urne, en ajoutant après chaque tirage une boule de la couleur tirée. On notera B_k : « la k-ième boule tirée est blanche » et R_k : « la k-ième boule tirée est rouge ». On admet que l'événement « ne pas obtenir de boule rouge » est négligeable.
On note alors Z la variable aléatoire donnant le numéro du tirage amenant la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.

ADC 3 Dans une urne composée de 2 boules rouges et de 3 boules bleues, nous tirons une infinité de boules. Les tirages se font avec remise et sont supposés indépendants. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue pour la première fois. Déterminer la loi de N et son espérance.

ADC 4 Montrer que les variables X et Y (de l'ADC1) admettent une espérance et la calculer.

Exercices

Exercice 1 Soit X une une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$$

1. On pose $u_k = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2(k+1)}$. Montrer que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = u_k - u_{k+1}$.
2. Déterminer la valeur de a.
3. Montrer que $Y = X - 1$ est une variable aléatoire réelle discrète et déterminer sa loi.

Exercice 2 Le nombre X de candidats se présentant à un examen suit une loi de Poisson d'espérance M. Chaque candidat a une probabilité p d'être reçu, indépendamment des résultats des autres candidats. On note Y le nombre de candidats reçus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_{[X=n]}(Y = k)$ (deux cas à distinguer selon la valeur de n).
3. Déterminer alors la loi de Y.

Exercice 3 Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, ..., n, ... et on fait les hypothèses :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la sauteur passe la hauteur n (s'il arrive à ce stade) est $\frac{1}{n}$;
- il est éliminé dès qu'il manque un saut.

On admet que le perchiste est presque sûrement éliminé au bout d'un nombre fini de sauts. Soit alors X le nombre de sauts réussis par le perchiste.

1. Déterminer la loi de X.
2. À l'aide du théorème de transfert, montrer que $Y = X+1$ admet une espérance et la calculer. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4 On considère une variable aléatoire T définie par

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(T = k) = \frac{k-1}{k!}$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.
   On pourra remarquer que p_k s'écrit : $p_k = u_{k-1} - u_k$.
2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$kP(T = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ \dfrac{1}{(k-2)!} & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}$$
   Montrer que T admet une espérance et que $E(T) = \mathrm{e}$.
3. Montrer que T admet une variance et la calculer.
   Indication : Pour $k > 2$, $\dfrac{k}{(k-2)!} = \dfrac{k-2}{(k-2)!} + \dfrac{2}{(k-2)!} = \dots$

Exercice 5 On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.

Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i^{e} tirage ».

On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche.

Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

1. Déterminer $P(X = 1)$.
2. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(X = k)$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\overline{B_i}$, puis montrer que :
   $$\forall k \geq 2, \ P(X = k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)$$
   Vérifier que cette formule reste valable pour $k = 1$.
3. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.
4. Montrer que X et Y suivent la même loi.