PB4 : Correction des exercices

Exercice 1

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$u_k - u_{k+1} = \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}\right) - \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)}\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2) - 2k(k+2) + k(k+1)}{2k(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2}{2k(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

2) Il s'agit de calculer a pour que X soit une variable aléatoire bien définie.

Notons $p_k = \dfrac{a}{k(k+1)(k+2)}$

* $p_k \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad a \geqslant 0$
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = a \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = a\left(u_1 - u_{n+1}\right)$$

$$= a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}\right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{a}{4} \in \mathbb{R}$$

Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \frac{a}{4}$.

Donc : $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$

Ainsi, X est bien définie si et seulement si

$$\boxed{a = 4}$$

3) * $Y(\Omega) = \{ k-1, \ k \in \mathbb{N}^* \} = \mathbb{N}$

* $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = P(X-1=k)$

$$= P(X = k+1)$$

$$= \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad \text{car } k+1 \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 2

1) On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

$E(X) = \lambda$. Or $E(X) = M$ donc $\lambda = M$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(M)}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

<u>Si $[X=n]$ est réalisé</u>, il y a n candidats.

On répète n fois l'épreuve « un candidat se présente ».

Les épreuves sont identiques et indépendantes et à chaque épreuve, le succès est « le candidat est reçu » de probabilité p.

Dans ce cas, Y est égale au nombre de succès, donc suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\boxed{P_{[X=n]}(Y=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}}$$

3) * $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons $P(Y=k)$.

$([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) \underbrace{P_{[X=n]}(Y=k)}_{=0 \text{ si } n<k}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + 0$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^n}{\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\mu} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mu^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k}$$

ici la variable est n ; k est une constante

$$= \frac{e^{-\mu} p^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^{\ell+k}}{\ell!} (1-p)^{\ell}$$

$(\ell = n-k)$

$$= \frac{e^{-\mu} p^k \mu^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\mu)^{\ell}}{\ell!}$$

on reconnaît une série exponentielle

$$= \frac{e^{-\mu} p^k \mu^k}{k!} \times e^{(1-p)\mu}$$

$$\boxed{P(Y=k) = \frac{e^{-p\mu} (p\mu)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

Ici, on reconnaît $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p\mu)}$

Exercice 3

1) Notons H_n : « le perchiste passe la hauteur numéro n »

* $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$ ($X=0$ si le perchiste est éliminé dès le 1er saut)

* $\boxed{P(X=0) = P(\overline{H_1}) = 0}$: négligeable donc on peut aussi considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=n) = P(H_1 \cap \dots \cap H_n \cap \overline{H_{n+1}})$$

$$= P(H_1)\, P_{H_1}(H_2) \dots P_{H_1 \cap \dots \cap H_{n-1}}(H_n)\, P_{H_1 \cap \dots \cap H_n}(\overline{H_{n+1}})$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+2}$$

$$= \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\boxed{P(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}}$$

Rq : formule aussi valable en $n=0$.

2) Soit $Y = X+1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|(n+1)\, P(X=n)| = (n+1)\, P(X=n) = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ est une série exponentielle donc elle converge.

Ainsi, d'après le théorème de transfert, Y admet une espérance et

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\boxed{E(Y) = e}$$

Par linéarité, $X = Y-1$ admet une espérance et

$$\boxed{E(X) = E(Y) - 1 = e-1}$$

Exercice 4

1) On réalise une infinité de lancers indépendants.
À chaque lancer, le succès est « obtenir Pile » de probabilité $p \in]0,1[$.
S_1 est égale au rang du 1^{er} succès.
Donc $\boxed{S_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$ et $\boxed{E(S_1) = \frac{1}{p}}$

2) a) On réalise n lancers identiques et indépendants
X_n est égale au nombre de succès « obtenir Pile ».
Donc $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$

b) Soit $k \geq 2$.

* $S_k(\Omega) = [\![k, +\infty [\![$
* Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

$$[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \cap \overline{F_n}$$

k-ième Pile au n-ième lancer.

c) $\forall n \geq k$

$$P(S_k = n) = P(X_{n-1} = k-1) \; P(\overline{F_n})$$ car les lancers sont indépendants

$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \times p$$

$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k} q^{n-k}$$

Exercice 4

1) Notons $p_k = \dfrac{k-1}{k!}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

* $p_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$
* Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{1}{0!} - \frac{1}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Ainsi, T est bien définie.

Rq : On peut aussi voir p_k comme une différence de séries exponentielles.

2) * Commençons par montrer que T admet une espérance

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$|k\,P(T=k)| = \frac{k(k-1)}{k!} = \frac{k-1}{(k-1)!} = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-2)!} & \text{si } k \geq 2 \\ 0 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Rédaction 1 : On calcule la somme partielle.

Pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!} = \underbrace{0}_{k=1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{1}{\ell!}$ $(\ell = k-2)$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} e \in \mathbb{R}$ par série exponentielle.

Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k\,P(T=k)$ converge absolument : T admet une espérance et

$$E(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(T=k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!} = e$$

Rédaction 2 : À décalage d'indice près $(n = k-2)$ $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!}$ est une série exponentielle, donc elle converge.

Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,P(T=k)$ converge absolument : T admet une espérance.

Alors
$$E(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(T=k) = 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}$$
$$= \sum_{\substack{n=0 \\ (n=k-2)}}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$
$$= e$$

3) T admet une variance $\Leftrightarrow$ T admet un moment d'ordre 2

$\Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |k^2 P(T=k)|$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 P(T=k)$ converge.

car $k^2 P(T=k) \geq 0$.

Or, pour $k\in\mathbb{N}^*$,
$$k^2 P(T=k) = \frac{k^2(k-1)}{k!}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k=1 \\ \dfrac{k}{(k-2)!} & \text{si } k\geq 2 \end{cases}$$

Pour $k\geq 2$,
$$\frac{k}{(k-2)!} = \frac{k-2}{(k-2)!} + \frac{2}{(k-2)!} = \frac{1}{(k-3)!} + \frac{2}{(k-2)!}$$

Donc
$$k^2 P(T=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k=1 \\ 2 & \text{si } k=2 \\ \dfrac{1}{(k-3)!} + \dfrac{2}{(k-2)!} & \text{si } k\geq 3 \end{cases}$$

À décalage d'indice près, $\sum_{k\geq 3} \frac{1}{(k-3)!}$ et $\sum_{k\geq 3} \frac{1}{(k-2)!}$ *

sont des séries exponentielles donc elles convergent.

Par combinaison linéaire, $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 P(T=k)$ converge

et <u>T admet une variance.</u>

* <u>Rq</u> : on peut aussi dire que $\sum \frac{1}{(k-2)!}$ converge d'après l'étude de l'espérance de T (question 2).

* $$E(T^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(T=k)$$

$$= \underset{k=1}{\underset{\uparrow}{0}} + \underset{k=2}{\underset{\uparrow}{2}} + \sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{(k-3)!} + \frac{2}{(k-2)!}\right)$$

$$= 2 + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-3)!} + 2\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}$$

$$= 2 + \underset{(n=k-3)}{\sum_{n=0}^{+\infty}} \frac{1}{n!} + 2 \underset{(n=k-2)}{\sum_{n=1}^{+\infty}} \frac{1}{n!}$$

$$= 2 + e + 2(e-1)$$

terme $n=0$ manquant

$$= 3e$$

* D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$

$$\boxed{V(T) = 3e - e^2}$$

Deuxième rédaction pour $E(T^2)$:

expression valable dès $k=2$ (sans $(k-3)!$)

$$E(T^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(T=k) = \underset{(k=1)}{0} + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{k-2}{(k-2)!} + \frac{2}{(k-2)!}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-2}{(k-2)!} + 2\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}}_{=e \text{ d'après } 2)} = \underbrace{0}_{k=2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-3)!} + 2e$$

$$= \underset{(n=k-3)}{\sum_{n=0}^{+\infty}} \frac{1}{n!} + 2e = e + 2e = 3e$$

Rédaction 2 (somme partielle) soit $n \geq 3$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(k-1)}{k!} = \underbrace{0}_{k=1} + \underbrace{2}_{k=2} + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{(k-3)!} + \frac{2}{(k-2)!} \right)$$

$$= 2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} + 2 \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-2)!}$$

$$= 2 + \sum_{\substack{\ell=0 \\ (\ell = k-3)}}^{n-3} \frac{1}{\ell!} + 2 \sum_{\substack{\ell=1 \\ (\ell = k-2)}}^{n-2} \frac{1}{\ell!}$$

il manque le terme $\ell = 0$

$$= 2 + \sum_{\ell=0}^{n-3} \frac{1}{\ell!} + 2 \left(\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{1}{\ell!} - \frac{1}{0!} \right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 2 + e + 2(e-1) = 3e \in \mathbb{R}$$

par série exponentielle.

Exercice 5

U : 1 blanche + $(n-1)$ noires

V : $(n-1)$ blanches + 1 noire.

1) $[X=1]$: « le 1er tirage donne une boule noire ».

$(U,\overline{U})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(U)\,P_U(X=1) + P(\overline{U})\,P_{\overline{U}}(X=1)\\
&= P(U)\,P_U(\overline{B_1}) + P(\overline{U})\,P_{\overline{U}}(\overline{B_1})\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\\
&= \frac{n}{2n}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2) Soit $k\geq 2$.

1ère boule noire

$$[X=k] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$$

Toujours avec la formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= P(U)\,P_U(X=k) + P(\overline{U})\,P_{\overline{U}}(X=k)\\
&= P(U)\,P_U(B_1)\dots P_U(B_{k-1})\,P_U(\overline{B_k})\\
&\quad + P(\overline{U})\,P_{\overline{U}}(B_1)\dots P_{\overline{U}}(B_{k-1})\,P_{\overline{U}}(\overline{B_k})
\end{aligned}
$$

par indépendance des tirages dans U et dans V.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{1}{n}\times\dots\times\frac{1}{n}}_{k-1 \text{ termes}}\times\frac{n-1}{n}\\
&\quad + \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{n-1}{n}\times\dots\times\frac{n-1}{n}}_{k-1\text{ termes}}\times\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Pour $k=1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{2}\left(1\times\frac{n-1}{n} + 1\times\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\\
&= P(X=1).
\end{aligned}
$$

Donc $\forall k\geq 1,\ P(X=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{1}{n}\right)$

3) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|k P(X=k)| = k P(X=k)$$
$$= \frac{n-1}{2n} \times k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \frac{1}{2n} \times k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

Or les séries $\sum_{k \geq 1} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 1} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ sont des séries géométriques dérivées $1^{ère}$ de raison $\frac{1}{n} \in]-1,1[$ et $\frac{n-1}{n} \in]-1,1[$ donc elles convergent. Par combinaison linéaire, $\sum_{k \in X(\Omega)} |k P(X=k)|$ converge donc <u>X admet une espérance.</u>

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k)$$
$$= \frac{n-1}{2n} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}$$
$$= \frac{n-1}{2n} \times \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{1}{2n} \times n^2$$
$$= \frac{n}{2(n-1)} + \frac{n}{2}$$
$$= \frac{n^2}{2(n-1)}$$

4) Par symétrie de composition d'urne, en échangeant les couleurs on voit que X et Y ont la même loi.