# PB 4 : Correction des ADC

## ADC 1

1) Notons $p_k = \dfrac{1}{e\, k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

* $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k \geqslant 0$

* Rédaction 1 : $p_k = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1^k}{k!}$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{k!}$ est une série exponentielle donc elle converge.

Ainsi $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} \times e = 1$$

⚠ $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$

$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

$\neq \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

Rédaction 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} p_k = \dfrac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{e} \times e = 1 \in \mathbb{R}$

car $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{k!}$ est une série exponentielle donc convergente.

Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$..

Donc il existe bien une variable aléatoire $X$ telle que

→ $X(\Omega) = \mathbb{N}$

→ $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = p_k = \dfrac{1}{e\,k!}$.

2) Soit $Y = 2X+1$.

→ $\boxed{Y(\Omega) = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

→ Soit $n \in Y(\Omega)$.

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

$P(Y = n) = P(2X+1 = n) = P\left(X = \dfrac{n-1}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$ car $\dfrac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$

$$\boxed{P(Y=n) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}}$$

# ADC 2

1) → $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

→ Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $[Z = k] = B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap R_k$

donc

$$P(Z = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(R_k)$$

$$= \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$$

d'après 1)

**Conclusion**

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

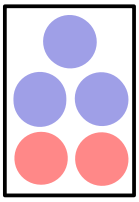
2) Pour $k \in Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{(k+1)}$.

$$\sum_{k=1}^{n} P(Z = k) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{par télescopage}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = k) = 1$.

## ADC 3



On répète une infinité de fois l'épreuve "Tirer une boule". Les épreuves sont identiques et indépendantes. Pour chaque épreuve, le succès est "obtenir une boule bleue" de probabilité $\frac{3}{5}$.

N est la variable aléatoire égale au rang du 1er succès. Donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{5}\right)}$

On a : $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N=k) = \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$

D'après le cours,

N admet une espérance et $\boxed{E(N) = \frac{5}{3}}$.

## ADC 4

$\star$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \frac{1}{e\, k!} = \frac{e^{-1}\, 1^k}{k!}$

On remarque que $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)}$ donc X admet une espérance et

$$\boxed{E(X) = 1.}$$

$\star$ Par linéarité de l'espérance, $Y = 2X+1$ admet une espérance et

$$\boxed{E(Y) = 2E(X) + 1 = 3}$$

Remarque : On peut aussi refaire la justification et le calcul de $E(X)$ (si on n'a pas vu la loi usuelle). Il faut alors suivre exactement la démonstration du cours.