TD – PB3

Espaces probabilisés quelconques

Applications directes du cours

ADC 1 **Révisions PB1**
On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?
5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule le soit aussi ?

ADC 2 On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'événement : « on obtient au moins une boule rouge ». On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- A_n : « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage »,
- B_n : « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »,
- C_n : « on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages ».

1. Calculer $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Exprimer E à l'aide des événements A_n et en déduire $P(E)$.

Exercices

Exercice 1 Un feu bicolore (rouge/vert), lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$. On suppose qu'il est rouge à l'instant $t = 0$. On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$.

1. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que
$$r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{4}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}r_n + \frac{3}{4}v_n$$
On commencera par définir proprement les événements entrant en jeu.
2. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3. En déduire la valeur de r_n puis de v_n.

Exercice 2 *On admettra que, pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.*

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

1. Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé ». Déterminer $P(A_k)$ et justifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 1$.

   Pour la suite, on admettra que $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est un système complet d'événements.

2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?

3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ?

4. On appelle B l'événement : « on a obtenu la boule blanche ». En utilisant la formule des probabilités totales calculer $P(B)$.

Exercice 3 Des boules indiscernables et en nombre infini sont placées au hasard et une à une dans deux boîtes (U et V). On place les boules indépendamment les unes des autres.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_k : « les boîtes sont toutes les deux non vides pour la première fois lorsqu'on place la k-ième boule » pour $k \geqslant 2$.

2. Montrer qu'il est quasi-certain que les deux boîtes deviennent non vides.

Exercice 4 On dispose de deux pièces non discernables : la pièce A donnant Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On réalise l'expérience suivante :

- Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard et on la lance.
- Ensuite, si on obtient Pile on garde la même pièce pour le lancer suivant ;
- si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.
- On réalise ainsi une infinité de lancers.

On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'événement « le k-ième lancer se fait avec la pièce A »,$B_k = \overline{A_k}$ et E_k l'événement « le k-ième lancer amène Pile ».

1. Trouver une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.
3. En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.