TD PB3 : Corrigé des exercices

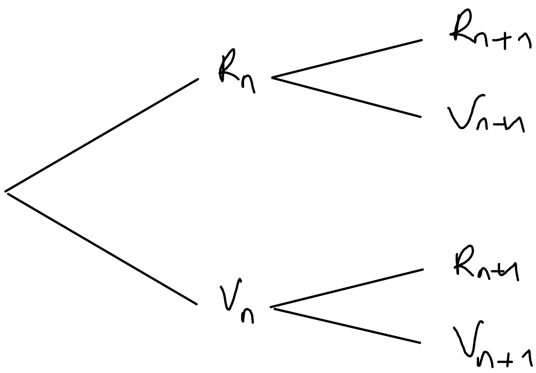
Exercice 1

Notons :

R_n : « le feu est rouge à l'instant n »

V_n : « le feu est vert à l'instant n »

pour $n \in \mathbb{N}$.



(R_n, V_n) est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_{n+1}) = P(R_n)\, P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n)\, P_{V_n}(R_{n+1})$$

Or $P(R_n) = r_n$ $\qquad$ $P(V_n) = v_n$

$P_{R_n}(R_{n+1}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P_{V_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{4}$

Donc $\boxed{r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n + \frac{1}{4} v_n}$

De même,

$$P(V_{n+1}) = P(R_n)\, P_{R_n}(V_{n+1}) + P(V_n)\, P_{V_n}(V_{n+1})$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{2}{3} r_n + \frac{3}{4} v_n}$$

⚠ Sous cette forme, on ne peut pas dire que (r_n) et (v_n) sont arithmético-géométriques.
On va transformer la relation de récurrence.

Or $\quad v_n = P(V_n) = P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n) = 1 - r_n$.

Donc

$$r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n + \frac{1}{4}(1 - r_n) = \frac{1}{12} r_n + \frac{1}{4}.$$

La suite $(r_n)_{n \geq 0}$ est arithmético-géométrique.

$\ast$ $x = \frac{1}{12} x + \frac{1}{4} \iff 12x = x + 3 \iff x = \frac{3}{11}$

$\ast$ Notons $u_n = r_n - \frac{3}{11}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= r_{n+1} - \frac{3}{11} \\ &= \frac{1}{12} r_n + \frac{1}{4} - \frac{3}{11} \\ &= \frac{1}{12}\left(u_n + \frac{3}{11}\right) - \frac{1}{44} \\ &= \frac{1}{12} u_n + \frac{1}{44} - \frac{1}{44} \\ &= \frac{1}{12} u_n \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de 1^er^ terme

$$u_0 = r_0 - \frac{3}{11} = P(R_0) - \frac{3}{11} = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$ et donc

$$\boxed{r_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{3}{11}}$$

$$\boxed{v_n = 1 - r_n = \frac{8}{11} - \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n}$$

Remarque : On peut aussi montrer que (r_n) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$r_{n+2} = \frac{13}{12} r_{n+1} - \frac{1}{12} r_n$$

car

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= \frac{1}{3} r_{n+1} + \frac{1}{4} v_{n+1} = \frac{1}{3} r_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} r_n + \frac{3}{4} v_n\right) \\ &= \frac{1}{3} r_{n+1} + \frac{1}{6} r_n + \frac{3}{16}\left(4 r_{n+1} - \frac{4}{3} r_n\right) \\ &= \frac{13}{12} r_{n+1} - \frac{1}{12} r_n. \end{aligned}$$

Les racines de (EC) sont 1 et $\frac{1}{12}$. Les calculs sont plus longs.

Exercice 2

1) * Notons S_k : « Le k-ième lancer donne 6 »

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$.

On peut supposer les lancers indépendants (pour avoir vraiment l'indépendance, il faut supposer que l'on réalise une infinité de lancers)

$$P(A_k) = P(\overline{S_1})\, P(\overline{S_2}) \cdots P(\overline{S_{k-1}})\, P(S_k)$$

$$\boxed{P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}}$$

* Les A_k sont des événements deux à deux incompatibles.

* La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(A_k)$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1 \qquad \text{(série géométrique)}$$

2) B_k : « le premier 6 est obtenu au plus tard au k-ième lancer ».

* Méthode 1 :

On a : $B_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

or les A_i sont deux à deux incompatibles donc

$$P(B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{1}{6} \times \frac{1-(5/6)^k}{1-\frac{5}{6}}$$

$$\boxed{P(B_k) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}.$$

* Méthode 2 :

$\overline{B_k}$: « le 1^{er} six est obtenu au $(k+1)$-ième lancer ou plus tard »

$$\overline{B_k} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_k}$$

Par indépendance : $P(\overline{B_k}) = P(\overline{S_1})\, P(\overline{S_2}) \cdots P(\overline{S_k}) = \left(\frac{5}{6}\right)^k$

Donc $P(B_k) = 1 - P(\overline{B_k}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$.

3) On cherche $P_{B_{2k}}(\overline{B_k})$

On sait que $P_{B_{2k}}(\overline{B_k}) = \dfrac{P(\overline{B_k} \cap B_{2k})}{P(B_{2k})}$

Or * $P(B_{2k}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}$

* $\overline{B_k} \cap B_{2k} = A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \dots \cup A_{2k}$ (le 1er six est apparu entre le lancer n° k+1 et le lancer n° k).

Par incompatibilité,

$$P(\overline{B_k} \cap B_{2k}) = \sum_{i=k+1}^{2k} P(A_i) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1 - (5/6)^k}{1 - 5/6}$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)$$

Donc

$$P_{B_{2k}}(\overline{B_k}) = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)}{\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)}$$

$$P_{B_{2k}}(\overline{B_k}) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^k}$$

$$\boxed{P_{B_{2k}}(\overline{B_k}) = \frac{5^k}{6^k + 5^k}}$$

4) $(A_k)_{k\geq 1}$ est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)\, P_{A_k}(B)$$

Or si A_k est réalisé, avant le premier 6, on a obtenu $k-1$ fois un autre numéro, donc l'urne contient :

- 1 boule blanche
- $k-1$ boules rouges

Donc $P_{A_k}(B) = \frac{1}{k}$. Par conséquent,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(5/6)^k}{k}$$

$$= -\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right) \quad \text{d'après l'énoncé.}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{\ln(6)}{5}}$$

Exercice 3

1) Notons U_k : « la k-ième boule est placée dans l'urne U »
V_k : « la k-ième boule est placée dans l'urne V »

Pour tout $k \geq 2$

$$A_k = \underbrace{\left(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{k-1} \cap V_k\right)}_{B_k} \cup \underbrace{\left(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_{k-1} \cap U_k\right)}_{C_k}$$

- $U_1, U_2, \dots, U_{k-1}$ et V_k sont mutuellement indépendants donc

$$P(B_k) = P(U_1)P(U_2) \dots P(U_{k-1})\, P(V_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

De même $P(C_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

- Or B_k et C_k sont incompatibles donc :

$$P(A_k) = P(B_k) + P(C_k)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{P(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

Remarque : on aurait pu utiliser une probabilité uniforme sur un univers bien choisi.

On considère l'expérience aléatoire consistant à placer $k \geq 2$ boules selon le protocole de l'exercice.
L'univers Ω_k est l'ensemble des k-listes de $\{u, v\}$.
Par exemple, une issue est

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{ère}} \text{ boule}}}{u}, u, v, \dots, v, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ième boule}}}{u})$$

Ω_k est alors muni de la probabilité uniforme et $\text{Card}(\Omega_k) = 2^k$.

On a $\text{card}(A_k) = 2$ car $A_k = \{(u, \dots, u, v), (v, \dots, v, u)\}$

Donc $P(A_k) = \dfrac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega_k)} = \dfrac{2}{2^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

2) Soit A : " les deux boites deviennent non vides "

$A = \bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k$. Or les A_k sont deux à deux incompatibles. D'après le cours, la série $\sum_{k \geq 2} P(A_k)$ converge et $P(A) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Donc <u>A est quasi-certain</u>.

Exercice 4

1) (A_k, B_k) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$P(E_k) = P(A_k)\, P_{A_k}(E_k) + P(B_k)\, P_{B_k}(E_k)$$

$$= P(A_k) \times \frac{1}{2} + \left(1 - P(A_k)\right) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} P(A_k) + \frac{1}{4}.$$

2) De même,

$$P(A_{k+1}) = P(A_k)\, P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k)\, P_{B_k}(A_{k+1})$$

$$= P(A_k) \times \frac{1}{2} + \left(1 - P(A_k)\right) \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} P(A_k)$$

3) Notons $u_k = P(A_k)$. On a $\begin{cases} u_{k+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} u_k \\ u_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

On a une suite arithmético-géométrique.

$$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} x \iff 4x = 3 - x \iff 5x = 3 \iff x = \frac{3}{5}$$

Notons $v_k = u_k - \frac{3}{5}$.

$$v_{k+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} u_k - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{20} - \frac{1}{4}\left(v_k + \frac{3}{5}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} v_k$$

Donc (v_k) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

$$v_1 = u_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10}.$$

Ainsi, $\forall k \geqslant 1$, $v_k = -\frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

donc $P(A_k) = u_k = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

Puis
$$\begin{aligned} P(E_k) &= \frac{1}{4} P(A_k) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k} \end{aligned}$$