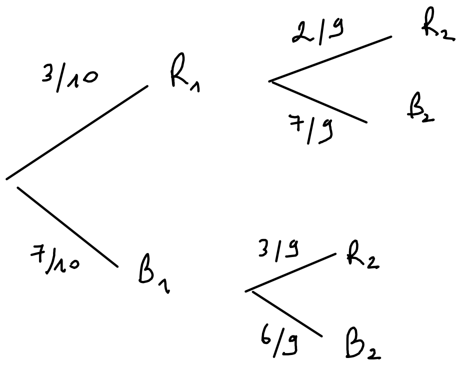
TDPB3 : Corrigé des ADC

ADC 1



R_k : « obtenir une boule rouge au k-ième tirage »

$B_k = \overline{R_k}$.

1) $P(R_1) = \dfrac{3}{10}$

2) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\, P_{R_1}(R_2)$ (formule des probabilités composées)

$= \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9}$

$= \dfrac{1}{15}$

3) (R_1, B_1) est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R_2) = P(R_1)\, P_{R_1}(R_2) + P(B_1)\, P_{B_1}(R_2)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{2}{30} + \frac{7}{30}$$

$$= \frac{3}{10}$$

4) * B : " aucune boule rouge ". $\quad B = B_1 \cap B_2$.

$P(B) = P(B_1)\, P_{B_1}(B_2) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{7}{15}$.

A : " au moins une boule rouge ". $\quad A = \overline{B}$

Donc $P(A) = 1 - P(B) = \dfrac{8}{15}$.

* 2e méthode : $A = R_1 \cup R_2$

$$P(A) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

5) $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1)\, P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)}$ d'après la formule de Bayes

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{15 \times 3} = \frac{2}{9}$$

ADC 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons R_n : « la n-ième boule est rouge ».

* $A_n = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_{n-1}} \cap R_n$

Or les événements $(R_1, \dots, R_n)$ sont mutuellement indépendants car les tirages sont réalisés avec remise.

$P(A_n) = P(\overline{R_1})\, P(\overline{R_2}) \times \dots \times P(\overline{R_{n-1}}) \times P(R_n)$

$$\boxed{P(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}}$$

* $C_n = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_n}$

Par indépendance,

$P(C_n) = P(\overline{R_1})\, P(\overline{R_2}) \dots P(\overline{R_n})$

$$\boxed{P(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

* $B_n = \overline{C_n}$ donc $\boxed{P(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

2) $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et les A_n sont deux à deux incompatibles.

D'après le cours, la série $\sum_{n \geq 1} P(A_n)$ converge et

$$P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

$$\boxed{P(E) = 1}$$

<u>Remarque</u> : On a aussi :

* $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

mais les B_n ne sont pas deux à deux incompatibles... (d'ailleurs la série $\sum_{n \geq 1} P(B_n)$ diverge car $P(B_n) \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$).

* $\overline{E} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{R_n}$ mais le calcul de la probabilité d'une intersection infinie est hors programme.