PB2 : Corrigé des exercices

Exercice 1

1) + $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$

+ L'univers Ω est l'ensemble des 2-listes sans répétition de $[\![1,n]\!]$

$Card(\Omega) = n(n-1)$. Ω est muni de la probabilité uniforme.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$[Z = k] = \{(k, i),\ (k,i) \text{ avec } i > k\}$

donc $Card(Z=k) = 2(n-k)$

Ainsi $P(Z=k) = \dfrac{Card(Z=k)}{Card(\Omega)} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(Z=k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k)$ ← arithmétique de raison -1

$= \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{n}(n-1)} \times \dfrac{(n-1)+(n-n)}{\cancel{2}} \times \cancel{n}$

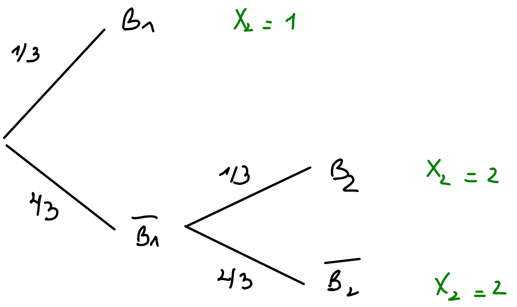
$= \dfrac{1}{n-1} \times (n-1) = 1$.

Exercice 2

On notera B_k : "obtenir une boule blanche au k-ième tirage".

1) Loi de X_2

$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

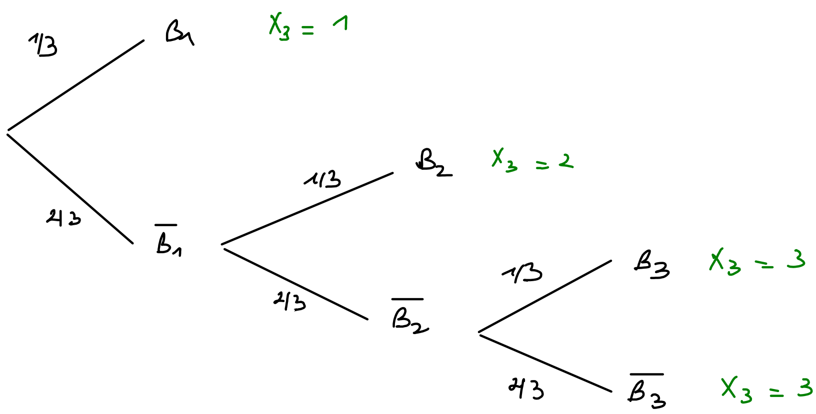


$P(X_2 = 1) = P(B_1) = \dfrac{1}{3}$

Donc $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \dfrac{2}{3}$.

2) <u>loi de X_3</u>

$X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.



$P(X_3 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{3}$.

$P(X_3 = 2) = P(\overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1})\, P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.

3) $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$

Notons B_k : "obtenir une boule blanche au k-ième tirage".

Soit $k \in [\![1, n]\!]$

→ si $k < n$, $[X_n = k] = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$

D'après la formule des probabilités composées

$$P(X_n = k) = P(\overline{B_1})\, P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \dots P_{\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}})\, P_{\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

→ si $k = n$, méthode 1

$$[X_n = n] = \left(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}\right)$$

les deux évènements de cette union étant incompatibles.

$$P(X_n = n) = P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) + P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n})$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + P(\overline{B_1})\, P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \dots P_{\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n})$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$ d'après le cas $k<n$ et la formule des probabilités composées.

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\rightarrow$ $k = n$ méthode 2

$$P(X_n = n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$ $\leftarrow$ géométrique de raison $\frac{2}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1 - (2/3)^{n-1}}{1 - 2/3}$$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Exercice 3

1) $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$

2) Soient $i \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

Supposons $[X = i]$ réalisé.

$\rightarrow$ si $i \geq 1$, alors $[Y = i]$ est forcément réalisé

$$P_{[X=i]}(Y = k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

$\rightarrow$ si $i = 0$, alors Y suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

donc $P_{[X=0]}(Y = k) = \frac{1}{n}$.

3) $([X = i])_{0 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i) \; P_{[X=i]}(Y = k)$$

$$= \underbrace{P(X = 0) \times \frac{1}{n}}_{\text{terme } i=0} + \underbrace{P(X = k) \times 1}_{\text{terme } i=k} + \underbrace{0}_{\text{autres termes}}$$

$$= (1-p)^n \times \frac{1}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4) $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left((1-p)^n \frac{1}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right)$

$= \frac{(1-p)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{= E(X) - \underbrace{0}_{\text{terme } k=0}}$ *

$= \frac{(1-p)^n}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + np$

$= \frac{(1-p)^n (n+1) - 2np}{2}$

* En effet, $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

Exercice 4

1) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])$ donc $E(X_1) = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

2) Notons U_k : " la puce saute de 1 case au k-ième saut "

$X_2(\Omega) = [\![2, 4]\!].$

$P(X_2 = 2) = P(U_1 \cap U_2) = P(U_1)\, P(U_2)$ par indépendance

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

$P(X_2 = 4) = P(\overline{U_1} \cap \overline{U_2}) = P(\overline{U_1})\, P(\overline{U_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Donc $P(X_2 = 3) = 1 - P(X_2 = 2) - P(X_2 = 4) = \frac{1}{2}.$

k	2	3	4
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X_2) = 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{1}{4} = 3$

$V(X_2) = (2-3)^2\times\frac{1}{4} + (3-3)^2\times\frac{1}{4} + (4-3)^2\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

3 a) La puce réalise n sauts. Les sauts sont identiques et indépendants. Le succès est, à chaque saut, " avancer de 2 cases " de probabilité $\frac{1}{2}$. Y_n est égale au nombre de succès donc

$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

$E(Y_n) = \frac{n}{2}$, $V(Y_n) = \frac{n}{4}.$

b) • $X_n = 2 \times Y_n + 1 \times (n - Y_n) = n + Y_n$

• On a $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$.

Pour $k \in [\![n, 2n]\!]$,

$$P(X_n = k) = P(n + Y_n = k)$$

$$= P(Y_n = k - n) \quad \text{avec} \quad k - n \in [\![0, n]\!]$$

$$= \binom{n}{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-(k-n)}$$

$$= \binom{n}{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(X_n) = n + E(Y_n) = \frac{3n}{2}$$

et on a : $V(X_n) = 1^2 \, V(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.