PB2 : Corrigé des ADC

ADC 1

1) . $\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$

. Notons R_k : " tirer une boule rouge au k-ième tirage "

$[X_1 = 0] = \overline{R_1} \cap \overline{R_2}$

Donc $P(X_1 = 0) = P(\overline{R_1})\, P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \frac{11}{16} \times \frac{10}{15}$

$\boxed{P(X_1 = 0) = \frac{11}{24}}$

$[X_1 = 2] = R_1 \cap R_2$

Donc $P(X_1 = 2) = P(R_1)\, P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{15}$

$\boxed{P(X_1 = 2) = \frac{1}{12}}$

Enfin,

$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2)$

$\boxed{P(X_1 = 1) = \frac{11}{24}}$

Autre méthode :

$[X_1 = 1] = (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)$

Comme $R_1 \cap \overline{R_2}$ et $\overline{R_1} \cap R_2$ sont incompatibles

$P(X_1 = 1) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$

$= P(R_1)\, P_{R_1}(\overline{R_2}) + P(\overline{R_1})\, P_{\overline{R_1}}(R_2)$

$= \frac{5}{16} \times \frac{11}{15} + \frac{11}{16} \times \frac{5}{15} = \frac{11}{24}$

ADC 2

. $X_2(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$.

. $P(X_2 = 6) = P(X_2 > 5) = \frac{1}{3}$.

. $P(X_2 < 5) = P(X_2 = 3) + P(X_2 = 4) = 2 \times P(X_2 = 3)$

Donc $P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{1}{6}$.

. $P(X_2 = 5) = 1 - P(X_2 = 3) - P(X_2 = 4) - P(X_2 = 6) = \frac{1}{3}$

AOC 3

L'univers Ω est l'ensemble des cartes. $\text{Card}(\Omega) = 52$.

On le munit de la probabilité uniforme.

$X_3(\Omega) = [\![1, 13]\!]$.

Soit $k \in [\![1, 13]\!]$. $P(X_3 = k) = \dfrac{\text{Card}(X_3 = k)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

Donc $\boxed{X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 13]\!])}$

2e rédaction :

$X_3(\Omega) = [\![1, 13]\!]$.

Les événements $[X_3 = k]$, $k \in [\![1, 13]\!]$, sont équiprobables

car chaque carte apparaît 4 fois dans le jeu.

Donc $X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 13]\!])$ et $\forall k \in [\![1, 13]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{13}$.

AOC 4

$B(\Omega) = \{0, 1\}$ donc B suit une loi de Bernoulli.

Déterminons son paramètre qui est $P(B = 1)$.

L'univers Ω est l'ensemble des mains de 2 cartes parmi 32.

$\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{2}$. Il est muni de la probabilité uniforme.

Pour obtenir une main de $[B = 1]$:

→ on choisit une valeur : 8 possibilités (as, roi, dame, .., 7)

→ puis on choisit 2 cartes parmi les 4 de cette valeur :
$\binom{4}{2} = 6$ possibilités.

Donc $\text{Card}(B = 1) = 8 \times 6$ donc $P(B = 1) = \dfrac{\text{Card}(B = 1)}{\text{Card}(\Omega)}$

$$= \frac{8 \times 6}{\binom{32}{2}} = \frac{8 \times 6}{\frac{32 \times 31}{2}} = \frac{3}{31}$$

$\boxed{B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{31}\right)}$

ADC 5

1)

k	3	4	5	6
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X_2) = 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{3} + 6\times\frac{1}{3} = \frac{3+4+10+12}{6} = \frac{29}{6}$$

$Y = 6X_2 - 1$. Par linéarité de l'espérance

$$E(Y) = 6E(X_2) - 1 = 28.$$

2) $$E(X_2^2) = 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{3} + 6^2\times\frac{1}{3} = \frac{9+16+50+72}{6} = \frac{147}{6}$$

D'après la formule de Huygens

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{147}{6} - \left(\frac{29}{6}\right)^2 = \frac{882-841}{36} = \frac{41}{36}$$

D'après le cours,

$$V(Y) = 6^2 \times V(X_2) = 41.$$

3) $X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦1,13⟧)$ donc $E(X_3) = \frac{13+1}{2} = 7$

$$V(X_3) = \frac{13^2-1}{12} = \frac{168}{12} = 14.$$

$B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{31}\right)$ donc $E(B) = \frac{3}{31}$ et $V(B) = \frac{3}{31}\times\left(1-\frac{3}{31}\right) = \frac{84}{961}$

ADC6

On lance 360 fois un dé équilibré. Les lancers sont identiques et indépendants. À chaque lancer, le succès est "obtenir 5" de probabilité $\frac{1}{6}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(360, \frac{1}{6}\right)$ donc $E(X) = 360\times\frac{1}{6} = 60$.

En moyenne, on obtient 60 fois 5.

ADC 7

D'après la formule de transfert

$$E(Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} 2^k P(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (2p + 1 - p)^n$$

$$= (p+1)^n$$