Interrogation du 13/03/2023

NOM Prénom :	/10

1. Donner la définition de « $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point $a \in I$ ». /1

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$ /3

On considère la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x^2+x+2}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. /2

* sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{2}$ donc f est polynomiale

0,5 et ainsi continue sur $]-\infty, 0[$.

0,5 * sur $]0, +\infty[$ $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ donc f est continue sur $]0, +\infty[$

* En 0 $f(0) = e^0 = 1$

0,5 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x/2} = 1 = f(0)$

0,5 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+x+2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 = f(0)$

Donc f est continue en 0

* Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

Tournez la page ➔

4. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. **/4**

0,5 * sur $]0,+\infty[$, $f(x) = e^{x/2}$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

0,5 * Sur $]-\infty, 0[$, f est polynomiale donc dérivable.

* En 0

→ À droite : si $x > 0$ $h = \frac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. $x = 2h$

1 $$\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{e^{x/2} - 1}{x} = \frac{e^{h} - 1}{2h} = \frac{1}{2} \times \frac{e^{h} - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2} \times 1$$ par taux d'accroissement usuel.

→ À gauche : si $x < 0$

1 $$\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2+x+2}{2} - 1}{x} = \frac{x^2 + x}{2x} = \frac{x+1}{2} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \frac{1}{2}$$

→ Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en 0
0,5 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
0,5