Interrogation du 21/11/2022

NOM Prénom : **/10**

Cours

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse. **/2**

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 3 = -2 - 3 = -5 \neq 0$

donc A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse. **/1**

B est diagonale et un de ses coefficients diagonaux est nul donc elle n'est pas inversible.

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse. **/2**

C est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc C est inversible

et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Tournez la page ➔

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que $P^3 - P^2 + 2I_3 = 0_3$ **/3**

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P^2 P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P^3 - P^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0_3$$

5. En déduire que P est inversible et donner son inverse (sous la forme d'une matrice 3×3 explicite). **/2**

$$P^3 - P^2 = -2I_3$$

Donc $-\frac{1}{2}P^3 + \frac{1}{2}P^2 = I_3$

Donc $\underbrace{P\left(-\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}P\right)}_{Q} = I_3$

$PQ = I_3$ donc <u>P est inversible</u> et $P^{-1} = Q$.

$$P^{-1} = -\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}P = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$