Interrogation du 10/10/2022

NOM Prénom :	**/10**

1. Déterminer le terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $w_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = w_n - 3$. **/1**

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison -3.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad w_n = w_1 + (n-1)\times(-3) = 4 - 3(n-1) = 7 - 3n$

2. Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 8 - 3u_n$. **/3**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

- Soit $x \in \mathbb{R}$
  $x = 8 - 3x \iff 4x = 8 \iff x = 2.$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $v_n = u_n - 2$.
  $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 8 - 3u_n - 2 = 6 - 3u_n$.

Or $u_n = v_n + 2$.

Donc $v_{n+1} = 6 - 3(v_n + 2) = 6 - 3v_n - 6 = -3v_n$.

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours,

$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = 8 \times (-3)^n$.

Or $u_n = v_n + 2$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 8 \times (-3)^n + 2}$$

Tournez la page ➔

3. Donner (sans justifier) les limites suivantes : Ce sont des croissances comparées. **/2**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = ..0.. \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(n)}{n^2} = .+\infty. \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{10}\exp(x) = .0... \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{20}}{5^n} = ..0..$$

4. Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 2^n + \mathrm{e}^{-n^2}$. **/2**

- $2 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

- $-n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc, par composée,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n^2} = 0$$

- Par somme, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

5. Calculer la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = 2n^3 - n^2 + 5$. **/2**

Soit $n > 0$,

$$t_n = n^3\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Par combinaison linéaire, $\lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 2$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

Par produit, $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$