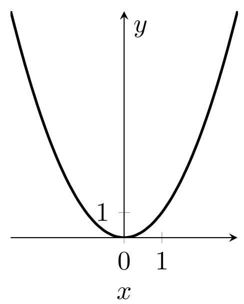
AN1

FONCTIONS USUELLES

I Fonctions puissances entières et polynomiales

Fonctions puissances $\boxed{x \mapsto x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

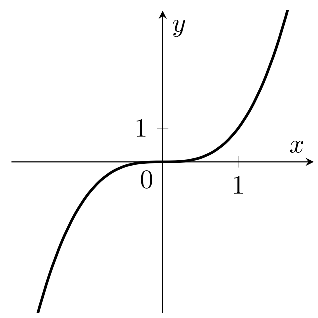
Cas où n est pair



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

$x \mapsto x^n$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Cas où n est impair



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^n$	$-\infty$ ↗		$+\infty$

$x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Fonctions polynomiales

Définition

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction de la forme

$$x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles.

Exemple 1. La fonction $x \mapsto 5x^3 - x + 7$ est une fonction polynomiale.

Proposition

Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonctions affines (et linéaires)

Soit $\boxed{f : x \mapsto ax+b}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ deux constantes. Le tableau de variation de f est :

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	

$x \mapsto ax+b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe		$+$	0	$-$	

$x \mapsto ax+b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Fonctions du second degré

Soit $\boxed{f : x \mapsto ax^2+bx+c}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ trois constantes. Le tableau de variation de f est :

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-\infty$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[$

Remarque. Le coefficient noté ici a est appelé le *coefficient dominant* de f.
Le nombre $m = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ est à calculer en fonction de l'expression de f. Il s'agit du minimum ou maximum de f, suivant le signe de a.

Exemple 2. Soit $f\colon x \mapsto 3 - x - 2x^2$.

1. Quel est son ensemble de définition ?

2. Dresser son tableau de variation et son tableau de signe.

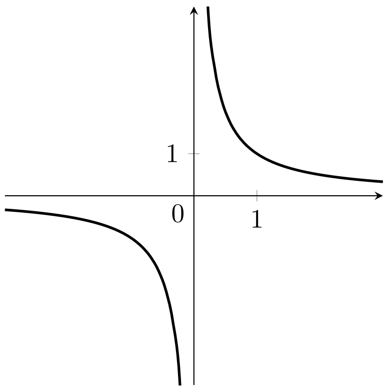
II Fonction inverse

Définition

La fonction **inverse** est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.

Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

III Fonction racine carrée

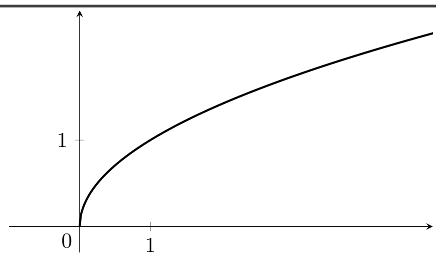
Définition

La fonction **racine carrée** est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ où, pour $x \geqslant 0$, $y = \sqrt{x}$ est l'unique réel positif tel que $y^2 = x$.

Proposition

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$0 \nearrow$	$+\infty$



Proposition (Propriétés de la racine carrée)

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \geqslant 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ et $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in \mathbb{R},\quad y^2 = x \Longleftrightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (\sqrt{x})^2 = x$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ \sqrt{y^2} = \begin{cases} y & \text{si } y \geqslant 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$.

IV Fonction logarithme népérien

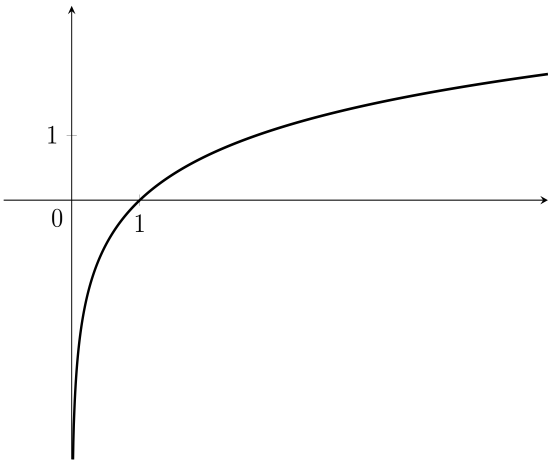
Définition

On appelle **logarithme népérien**, et on note $\ln : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ la fonction qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\ln$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

  On dit que $\ln$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	



Proposition

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Il existe un unique réel $\mathrm{e} \in]0,+\infty[$ tel que $\boxed{\ln(\mathrm{e}) = 1}$. On a : $2 < \mathrm{e} < 3$ (en fait, $\mathrm{e} \approx 2,72$.) Ce nombre est appelé *nombre d'Euler*.
- $\forall a, b \in]0,+\infty[$, $\ln(a) = \ln(b) \Longleftrightarrow a = b$.

Proposition (Propriétés algébriques)

Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on a :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\ln\left(a^n\right) = n \ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

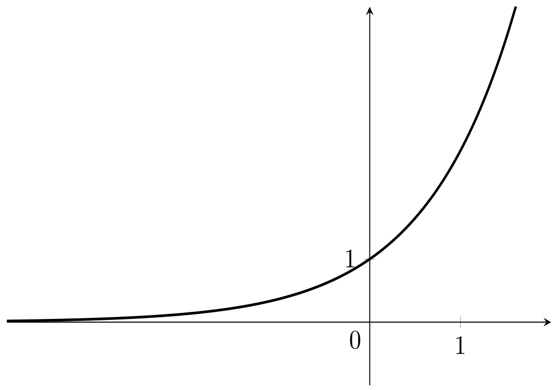
V Fonction exponentielle

Définition

On appelle **fonction exponentielle**, et on note $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$

où $y = \exp(x)$ est l'unique réel strictement positif tel que $\ln(y) = x$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$



Proposition

- La fonction exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Proposition

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]0,+\infty[$, $\exp(x) = y \iff x = \ln(y)$.
3. $\forall y > 0$, $\exp(\ln(y)) = y$; $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$
4. $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = \mathrm{e}$ (nombre d'Euler).

Proposition (Propriétés algébriques)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a :

- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Remarque.
Ces propriétés justifient la notation puissance : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$, avec $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,72$.

- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
- $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$
- $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{na} = \left(\mathrm{e}^a\right)^n$.

VI Puissances réelles

Définition

Soit a un réel. La fonction **puissance** a est définie par

$$\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}$$

Exemple 3. $x^\pi = \left(e^{\ln(x)}\right)^\pi = e^{\pi\ln(x)}$.

Proposition

Pour $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Démonstration.

Voici les propriétés toujours valables avec les puissances réelles.

Proposition

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x > 0$: $x^a \times x^b = x^{a+b}$; $(x^a)^b = x^{ab}$; $\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$; $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ et $y > 0$: $(xy)^a = x^a \times y^a$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x > 0$: $\ln(x^a) = a\ln(x)$.
4. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x)^a = \exp(ax)$.

VII Fonction valeur absolue

Définition

La fonction **valeur absolue** est la fonction :

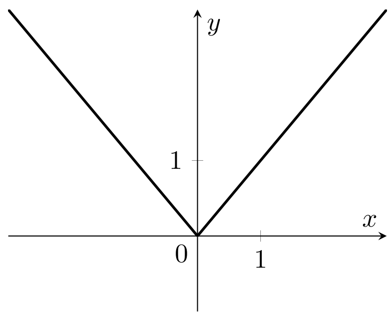
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Exemple 4. $|-3.2| = 3.2, \quad |0| = 0, \quad |157.41| = 157.41.$
$|x|$ représente la distance entre 0 et le nombre x sur la droite réelle.

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$.
2. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Elle n'est pas dérivable en 0.
3. Elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \lvert x \rvert$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Proposition (Règles de calcul)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\ |x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ \sqrt{x^2} = |x|$ et $|x|^2 = x^2$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x \times y| = |x| \times |y|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$. Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| =$

Exemple 6. Donner l'expression de $f : x \mapsto |3 - 2x|$ sans utiliser les valeurs absolues.

Proposition

Soit a un réel positif.

1. $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.
2. $|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$.

Exemple 7. Résoudre $|3x+4| = 7$

Exemple 8. Résoudre $|2x-1| \leqslant 4$

Exemple 9. Résoudre $|x-7| > 2$

Théorème (Inégalité triangulaire)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

VIII Fonction partie entière

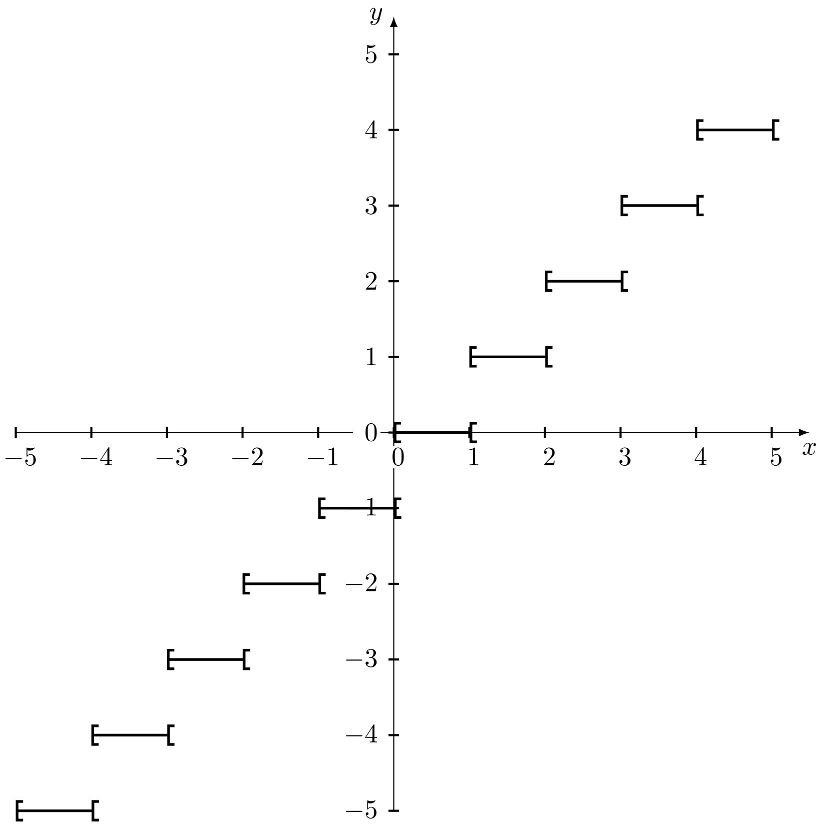
Définition

La fonction **partie entière** est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

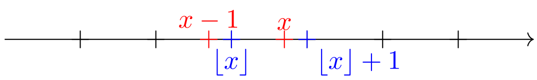
Exemple 10. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.00001 \rfloor = -3$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$.



Proposition (Caractérisation par un encadrement)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étant donné un **entier relatif** n, on a :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff n \leqslant x < n+1 \iff x-1 < n \leqslant x$$



Remarque.
- La fonction partie entière est une fonction en escalier. Elle présente une discontinuité en tout $n \in \mathbb{Z}$.
- La fonction partie entière est croissante, mais n'est pas strictement croissante. En effet, elle est constante sur tout intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.

IX Dérivées usuelles

Fonction f	**Fonction f'**	**Ensemble de dérivabilité**
$f(x) = k$, k constante	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^a$, a constante	$f'(x) = ax^{a-1}$	dépend de a
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, a constante	$f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par un réel	pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $(ku)' = ku'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composée	$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$
Cas particuliers	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$; $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$ $(u^a)' = au' \times u^{a-1}$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.