

## Programme de colle S8

7 au 11 novembre 2022

*La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).*

### AN3 Suites réelles

1. Raisonement par récurrence (simple, double)

2. Notion de suite

3. Exemples classiques

- ▷ Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
- ▷ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : détermination du terme général **uniquement dans le cas où  $\Delta \geq 0$** .

4. Limite éventuelle d'une suite

- ▷ Notion de convergence, de suite tendant vers  $\pm\infty$ .

**La connaissance des définitions rigoureuses («  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \dots$  ») n'est pas attendue des étudiants.**

Unicité de la limite.

- ▷ Limites usuelles :

- Pour  $a > 0$  (constante),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0$  ;
- Pour  $a < 0$  (constante),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = +\infty$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$  ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ .

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . On considère la suite géométrique  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  ;
- Si  $q = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$  ;
- Si  $-1 < q < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  ;
- Si  $q \leq -1$ , la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite.

- ▷ Croissances comparées : pour  $a > 0$  et  $b > 0$  des constantes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(\ln(x))^a} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^b  \ln(x) ^a = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{\exp(ax)} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^b \exp(ax) = 0$

Si  $q > 1$  et  $a > 0$  sont des constantes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{(\ln(n))^a} = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^a}{q^n} = 0$
--	--	---	---

Si  $-1 < q < 1$  et  $a > 0$  sont des constantes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \times n^a = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \times (\ln(n))^a = 0$
---	--

▷ Calcul de la limite d'une suite par opérations.

#### 5. Théorèmes sur les limites.

- Passage à la limite dans une inégalité.
- Exemples de suites extraites :  $(u_{n+1})$ ,  $(u_{n+2})$ ,  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$ .  
Si  $(u_n)$  admet une limite, alors ces suites ont également cette même limite.  
Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont la même limite, alors  $(u_n)$  a également cette limite.
- Théorème d'existence de limite par encadrement, par majoration, par minoration.
- Théorème de la limite monotone. **Pas de borne inf/borne sup.**
- Suites adjacentes.

#### Méthodes du chapitre

- ▷ Rédiger un raisonnement par récurrence (simple ou double).
- ▷ Étudier la monotonie d'une suite.
- ▷ Reconnaître/déterminer le terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique, d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux (avec  $\Delta \geq 0$ ).
- ▷ Calculer la limite d'une suite **connaissant son terme général**, par opérations. Lever une forme indéterminée.
- ▷ Démontrer qu'une suite converge par application du théorème de la limite monotone.
- ▷ Suite récurrente d'ordre 1 dont on a prouvé la convergence : savoir calculer la limite en passant à la limite dans la relation de récurrence.  
*Pour résumer : connaître les méthodes utilisées dans l'exercice 3 du TD.*
- ▷ **Méthode plus difficile** : démontrer par l'absurde qu'une suite récurrente monotone diverge.

## AN4 Sommes et produits

1. **Définitions** : notations  $\sum$ ,  $\prod$ . Factorielle.

### 2. Règles de calcul

- ▷ Propriétés générales. Nombre de termes.
- ▷ Linéarité de la somme.
- ▷ Extraction, regroupement. Application au calcul de sommes par récurrence.  
Changement d'indice simple ( $\ell = k + 1$ ,  $\ell = k - 2$  par exemple, *nous n'avons pas vu de changement d'indice miroir*).  
Télescopage.

### 3. Exemples classiques à connaître absolument

- ▷  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\triangleright \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$\triangleright \sum_{k=0}^n q^k$  (cas  $q = 1$  et  $q \neq 1$ ) et somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ .

#### 4. Formule du binôme de Newton

$\triangleright$  Pour  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{k} = 0$  si  $k > n$  et  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  si  $0 \leq k \leq n$ .

$\triangleright$  Propriétés :  $\binom{k}{n} \in \mathbb{N}$ , symétrie, formule de triangle de Pascal.

$\triangleright$  Cas particuliers à connaître :  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = n$ ,  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

$\triangleright$  Formule du binôme de Newton.

#### Méthodes du chapitre

$\triangleright$  Manipuler la notation  $n!$ , simplifications (voir ADC).

$\triangleright$  Reconnaître une somme usuelle et donner sa valeur.

$\triangleright$  Démontrer la valeur d'une somme par récurrence.

$\triangleright$  Calculer une somme télescopique.

$\triangleright$  Questions classiques vues en TD :

– Inégalités avec une somme (croissance de la somme).

– Étudier la monotonie de  $(S_n)$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

*À partir de là, un exercice peut faire appel aux théorèmes de convergence vus dans le chapitre sur les suites.*

$\triangleright$  Former le triangle de Pascal (les premières lignes).

$\triangleright$  Reconnaître et utiliser la formule du binôme.

#### Info boucles for et while

1. Déjà vu : print, numpy, numpy.random (fonction randint), instruction if.

2. Nouveau : range, boucles for et while

## Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [Exemple du cours] Déterminer la limite de  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ .
- [Exemple du cours] Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq n$ .
- [Démonstration] Énoncé puis démonstration de la valeur de  $S_n = \sum_{k=1}^n k$  par récurrence.
- [Exemple du cours] Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  en utilisant un télescopage.
- [Vu en informatique] On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4n}$ .  
Écrire un programme qui, étant donné un entier naturel  $n$ , calcule et affiche la valeur de  $u_n$ .  
*À savoir faire sur pour toute suite récurrente d'ordre 1.*

```
# n est supposé donné
import numpy as np
u = 0
for k in range(n):
    u = np.sqrt(u + 4*k)
print(u)
```

- [Vu en informatique] Déterminer le premier entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $2^n \geq 10000$  (avec une boucle while). *Idem, à savoir faire pour tout énoncé similaire.*

```
n = 0
while 2**n < 10000:
    n = n+1
print(n)
```

```
# ou alors, sans **
```

```
n = 0
p = 1 # 2**0
while p < 10000:
    p = p*2
    n = n+1
print(n)
```