Programme de colle S23

20 au 24 mars 2023

AN8 Dérivation

Prérequis : Étude de fonctions, fonctions usuelles, limites, continuité.

1. **Nombre dérivée, fonction dérivée** : Définition, taux d'accroissement. Dérivée à gauche et à droite. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
2. **Taux d'accroissement usuels :** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ constante).
3. **Opérations** : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
4. **Interprétation graphique :** Définition de la tangente, équation, cas d'une tangente verticale.
5. **Inégalité des accroissements finis.** Si f est dérivable sur un intervalle I et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$ ($k \in \mathbb{R}_+$ constante), alors :
$$\forall a, b \in I, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$
Remarque : le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis sont hors programme.
6. **Dérivées successives** : dérivée n-ième, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
7. **Convexité** : définition et caractérisation : si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors
f est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
Propriété analogue pour les fonctions concaves.
Point d'inflexion.

Méthodes du chapitre

- ▷ (Rappel) Montrer qu'une fonction est continue par opérations ; étude de la continuité en un point délicat ; prolongement par continuité.
- ▷ Montrer qu'une fonction est dérivable par opérations ; étude de la dérivabilité en un point délicat (taux d'accroissement).
- ▷ Étudier la convexité d'une fonction.
- ▷ Démontrer une formule de dérivée n-ième par récurrence.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [Exemple du cours] Justifier que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ mais pas en 0.
- [Exemple du cours] Justifier que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
- [Exemple du cours] Étudier la dérivabilité en 0 de $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- [Exemple du cours] Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = a^n \mathrm{e}^{ax}$.