Programme de colle S22

13 au 17 mars 2023

AL5 Théorie des graphes

Prérequis : Calcul matriciel

1. **Définitions**
   - ▷ Graphe non orienté : sommets, arêtes, ordre,sommets adjacents, degré d'un sommet $\deg(s)$.
   - ▷ Graphe orienté : sommets, arcs, ordre, degré sortant $\deg^+(s)$, degré entrant $\deg^-(s)$, degré $\deg(s)$.
   - ▷ Formule d'Euler (ou poignées de main).
2. **Matrice d'adjacence**
   - ▷ Définition dans le cas non orienté et le cas orienté. Dans le cas non orienté, elle est symétrique.
3. **Chaînes et chemins**
   - ▷ Vocabulaire dans le cas non orienté : chaîne, cycle, longueur
   - ▷ Vocabulaire dans le cas orienté : chemin, circuit, longueur
   - ▷ Graphe connexe
   - ▷ Avec la matrice d'adjacence :
     - – les coefficients de A^k correspondent au nombre de chaînes/chemins de longueur k du sommet i au sommet j ;
     - – le graphe (d'ordre n) est connexe si et seulement si $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.
   - ▷ Graphe eulérien, caractérisation avec le degré.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer le degré d'un sommet
- ▷ Donner la matrice d'adjacence d'un graphe.
- ▷ Démontrer la connexité d'un petit graphe, en citant un chemin/chaîne entre chaque paire de sommets.
- ▷ Trouver le nombre de chemins de longueur k entre deux sommets.
- ▷ Prouver la connexité ou non d'un graphe à l'aide de la matrice d'adjacence.
- ▷ Déterminer si un graphe est eulérien ou non.

AN8 Dérivation (première partie)

Prérequis : Étude de fonctions, fonctions usuelles, limites, continuité.

1. **Nombre dérivée, fonction dérivée** : Définition, taux d'accroissement. Dérivée à gauche et à droite. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
2. **Taux d'accroissement usuels :** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ constante).

3. **Opérations** : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

4. **Interprétation graphique :** Définition de la tangente, équation, cas d'une tangente verticale.

5. **Inégalité des accroissements finis.** Si f est dérivable sur un intervalle I et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$ ($k \in \mathbb{R}_+$ constante), alors :
$$\forall a, b \in I, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|.$$
Remarque : le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis sont hors programme.

Méthodes du chapitre

- ▹ (Rappel) Montrer qu'une fonction est continue par opérations ; étude de la continuité en un point délicat ; prolongement par continuité.
- ▹ Montrer qu'une fonction est dérivable par opérations ; étude de la dérivabilité en un point délicat (taux d'accroissement).

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [ADC2 - AL5] 20 personnes se réunissent et se serrent tous la main. Combien de poignées de mains ont été serrées ?
- [Exemple du cours] Justifier que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty$ mais pas en 0.
- [Exemple du cours] Justifier que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
- [Exemple du cours] Étudier la dérivabilité en 0 de $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.