Programme de colle S20

27 février au 3 mars 2023

PB2 Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Prérequis : Chapitre PB1 et calculs de sommes (dont sommes usuelles).

1. **Variable aléatoire réelle sur Ω, univers fini**
   - ▷ Définition de variable aléatoire. Ensemble $X(\Omega)$ (ensemble fini ici). Événements $[X = x]$, $[X \in I]$, $[X \leqslant x]$, etc. Système complet associé à une variable aléatoire.
   - ▷ Loi de probabilité d'une variable aléatoire. Loi de $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$.
2. **Espérance, variance**
   - ▷ Définition de l'espérance : $E(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$. Théorème de transfert.
   - ▷ Variance et écart-type d'une variable aléatoire. Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
   - ▷ $E(aX + b)$, $V(aX + b)$, $\sigma(aX + b)$.
3. **Lois usuelles**
   - ▷ Variable aléatoire certaine (constante).
   - ▷ Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ ou sur $[\![a, b]\!]$, espérance, variance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![a, b]\!]\}\big)$.
   - ▷ Loi de Bernoulli, espérance et variance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
   - ▷ Loi binomiale, espérance, variance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer la loi d'une variable aléatoire. Prérequis : Chapitre PB1.
- ▷ Déterminer la loi de $Y = g(X)$ avec $g(x) = ax + b$ ou $g(x) = x^2$.
- ▷ Calculer l'espérance, la variance d'une variable aléatoire.
- ▷ Savoir reconnaître une loi classique et utiliser les résultats du cours.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [Exemple de cours] On considère une urne contenant 3 boules numérotées 1 à 3. On effectue une succession de 4 tirages avec remise. On note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage ($k \in [\![1, 4]\!]$) et on note X la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient pas de 1 et sinon, égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un 1. Déterminer la loi de N_k et de X. *C'est le cas $n = 3$ de l'exemple 3.*
- [Cours] Définition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Donner l'espérance et la variance et faire la démonstration de l'espérance.
- [Cours] Définition d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. Donner l'espérance et la variance et démontrer ces deux valeurs.
- [Cours] Définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale avec modèle-type. Donner l'espérance et la variance (pas de démonstration demandée).