Programme de colle S17

23 au 27 janvier 2023

La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).

AN6 Fonctions polynomiales

On confond polynôme et fonction polynomiale (notation $P(x)$).
Le but du chapitre est la factorisation dans $\mathbb{R}[x]$ des polynômes. On rappelle que les nombres complexes ne sont pas au programme.

1. **L'ensemble $\mathbb{R}[x]$**
   - ▷ Définition, les opérations sont celles des fonctions (combinaison linéaire, produit, puissance $n \in \mathbb{N}$, composée, dérivée).
   - ▷ Identification des coefficients.
2. **Degré d'un polynôme**
   - ▷ Définition, dégré d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée, d'une dérivée.
   - ▷ Ensemble $\mathbb{R}_n[x]$.
3. **Racines et factorisation**
   - ▷ Notion de diviseur. Pratique de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[x]$ (énoncé du théorème non exigible).
   - ▷ Racines d'un polynôme. $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - a$ divise $P(x)$. Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines distinctes.
   - ▷ Exemples de factorisations de polynômes de degré $\geqslant 3$.
   - ▷ Polynômes du second degré : racines et factorisation (dans $\mathbb{R}$). Relation coefficients-racines.

   Notion de multiplicité hors programme.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer le degré d'un polynôme.
- ▷ Poser une division euclidienne.
- ▷ Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ ($n = 1, 2$ ou 3) vérifiant telles équations, en se ramenant à la résolution d'un système linéaire.
- ▷ Montrer que a est racine d'un polynôme donné.
- ▷ Factoriser un polynôme de degré 2, si possible.
- ▷ Factoriser un polynôme de degré $\geqslant 3$ donné en identifiant d'abord une racine ou un diviseur donné. Racines considérées comme évidentes : 0, 1, -1.
- ▷ Résoudre un système du type $\begin{cases} a+b = * \\ ab = * \end{cases}$ en remarquant que a et b sont les racines d'un certain polynôme du second degré.

AL4 Applications

1. **Généralités**

   ▷ Application $f : E \to F$, image d'un élément de E, antécédents éventuels d'un élément de F.

   ▷ Ensemble image, noté $f(E)$ (analyse) ou $\text{Im}(f)$ (algèbre).

   ▷ Composée de deux applications. Application identité.

2. **Injections, surjections, bijections**

   ▷ Définitions. Plusieurs formulations ont été données.

   ▷ Application réciproque d'une bijection. Propriété de la réciproque.

   ▷ Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifient $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

   ▷ Une fonction $f : I \to R$ strictement monotone sur l'intervalle I est injective de I dans $\mathbb{R}$.

   ▷ Si f est injective sur E, alors elle l'est aussi sur $A \subset E$.

Méthodes du chapitre

▷ Déterminer l'image d'un élément.

▷ Déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément.

▷ Ensemble image :

- Cas des fonctions : dresser le tableau de variation, puis donner (sans plus de justification) l'ensemble image par lecture du tableau.
- Exemples d'algèbre linéaire : l'ensemble image $\text{Im}(f)$ sera donné. Il s'agit de le démontrer par double inclusion.

▷ Injectivité :

- Cas des fonctions : stricte monotonie à savoir démontrer.
- Cas général : $f(u) = f(u') \Leftrightarrow u = u'$
- Savoir aussi démontrer que f n'est pas injective avec un contre-exemple.

▷ Surjectivité :

- Pour tout $v \in F$, deviner un $u \in E$ tel que $f(u) = v$.
- Pour tout $v \in F$, résoudre l'équation $f(u) = v$ et montrer qu'elle a au moins une solution.
- Avec l'ensemble image.
- Savoir aussi justifier que f n'est pas surjective avec un contre-exemple.

▷ Bijectivité : démontrer que f est bijective de E dans F et déterminer son application réciproque, en résolvant $f(u) = v$.

Note aux colleuses

Le théorème de la bijection et le T.V.I. n'ont pas été vus.
On donnera des applications qui sont soit des fonctions, soit des applications linéaires (sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$).

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [Exemple du cours] Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ à l'aide d'un polynôme.
- [Exemple du cours] Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ deux polynômes vérifiant $P(0) = Q(0)$ et $P(1) = Q(1)$ et $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.
- [Exemple du cours] Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z) \end{array}$ est surjective.
- [Exemple du cours] Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque.